

Der Begriff der Reduzierbarkeit von Problemen
und seine Präzisierungen
in der Theorie der rekursiven Funktionen

Günther Stark
München 1979

1980

Der Begriff der Reduzierbarkeit von Problemen
und seine Präzisierungen
in der Theorie der rekursiven Funktionen

Inaugural-Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
der Philosophischen Fakultät
der Ludwig-Maximilians-Universität zu München

vorgelegt von
Günther Stark

München
1979



Referent: Prof. Dr. U. Blau

Korreferent: Prof. Dr. M. Käsbauer

Tag der mündlichen Prüfung: 11. Februar 1980

Diese Arbeit
ist meinen Mathematik-Lehrern
Herrn H.Langer,
Herrn Dr.E.Reger,
Herrn R.Wagner
am Max-Planck-Gymnasium zu München-Pasing
in dankbarer Verehrung gewidmet.

Mein besonderer Dank gilt Herrn Prof.Dr.U.Blau für ihre intensive
Betreuung - schon während der Seminare in den Jahren 1976 bis '78.-
Daneben danke ich allen Mathematikern, die mir in zahlreichen Gesprächen
wertvolle Anregungen gaben.



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41551913_0001

INHALT

Einleitung: Unlösbar Probleme und der intuitive Begriff von Reduzierbarkeit	1
Kapitel I: Beispiele rekursiver Unlösbarkeit und intuitiver Reduk- tionen. Rekursiv aufzählbare und vollständige Mengen	10
§1.1 Das Halteproblem. Diagonalargumente. Die Indizes der totalen Funktionen	10
§1.2 Weitere Unlösbarkeitsresultate durch Reduktion. Metaprobleme	14
§1.3 Beispiele von Reduktionen auf das Halteproblem	21
§1.4 Rekursiv aufzählbare und vollständige Mengen	24
Kapitel II: m-1-Reduzierbarkeit	36
§2.1 Motivation und Definition nach Post. Einfache Eigenschaften und Beispiele	36
§2.2 m-Vollständigkeit	44
§2.3 Erzeugende Mengen, kreative Mengen und freie Mengen	47
Kapitel III: 1-1-Reduzierbarkeit	56
§3.1 Definition und Eigenschaften. Der Satz von Myhill	56
§3.2 Äquivalenz von m- und 1-Vollständigkeit	65
§3.3 Zylinder	70
§3.4 Schlichte Mengen; mesoische und mediale Mengen	77
§3.5 Gradstruktur	82
Kapitel IV: Wahrheitstafel-Reduzierbarkeit (wahrheitsfunktionale Reduzierbarkeit)	88
§4.1 Heuristische Überlegungen nach Post(1944)	88
§4.2 Definition nach Rogers(1967); Beispiele und einfache Eigenschaften	94
§4.3 tt-Reduzierbarkeit und m-Reduzierbarkeit; tt-Zylinder	102
§4.4 Ungenügen der tt-Reduzierbarkeit	107
Kapitel V: Beschränkte Wahrheitstafel-Reduzierbarkeit	109
§5.1 Motivation und Definition; Eigenschaften	109
§5.2 btt- und tt-Reduzierbarkeit	113
§5.3 btt- und m-Reduzierbarkeit	117
§5.4 btt-Reduzierbarkeit mit Norm 1	123
Kapitel VI: q-Reduzierbarkeit	127
§6.1 Definition und Eigenschaften	127
§6.2 q-Zylinder	130
§6.3 $\leq_q$ und $\leq_{tt}$ (bzw. $\leq_{btt}$); q-kreative Mengen	133

Kapitel VII: Diskussion formal verschiedener Präzisierungen der Turing-Reduzierbarkeit	136
§7.1 Arbeitsübersicht	
§7.2 Rogers' "basic characterization" relativer Algorithmen; Präzi- sierung der Turing-Reduzierbarkeit als $\leq_T$ über reguläre Mengen	146
§7.3 Modifikation und Berichtigung von Rogers' Verfahren: Präzisie- rung der Turing-Reduzierbarkeit als $\leq_B$ über stark reguläre Mengen	158
§7.4 Verallgemeinerung von $\leq_T$: Präzisierung der Turing-Reduzierbar- keit als $\leq_s$ und $\leq_w$ über schwach reguläre bzw. beliebige rekur- siv aufzählbare Mengen	164
§7.5 Äquivalenz von $\leq_B$ und $\leq_s$	168
§7.6 Äquivalenz von $\leq_s$ und $\leq_w$; Reflexivität und Transitivität von $\leq_T$	180
Kapitel VIII: Eigenschaften der T-Reduzierbarkeit	189
§8.1 Die relativierte Theorie	189
§8.2 Einfache Eigenschaften von $\leq_T$	192
§8.3 Hyperschlichte Mengen; der Satz von Dekker	199
§8.4 T-Reduzierbarkeit und tt-Reduzierbarkeit	204
Kapitel IX: Aufzählungs-Reduzierbarkeit	209
§9.1 Definition und einfache Eigenschaften; Aufzählungsoperatoren	209
§9.2 Rekursive Operatoren	216
§9.3 Charakterisierung von $\leq_T$, $\leq_{tt}$, $\leq_m$ und $\leq_1$ durch $\leq_e$	221
Bibliographie	228

EINLEITUNG: Unlösbare Probleme und der intuitive Begriff von Reduzierbarkeit

Als eine der eindrucksvollsten Errungenschaften der Mathematik des 20. Jahrhunderts gilt die Entdeckung, daß es u n l ö s b a r e P r o b l e m e gibt. "Unlösbar" ist dabei nicht als "ungelöst" mißzuverstehen. Ungelöst sind Probleme, deren Lösung man zwar noch nicht kennt, bei denen man aber im allgemeinen davon ausgehen kann, daß sie prinzipiell eine Lösung besitzen. Der Akzent liegt auf "noch": Auch wenn ihre Lösung noch unbekannt ist - es scheint sinnvoll, nach ihr zu suchen, und man darf hoffen, sie eines Tages zu finden. U n l ö s b a r dagegen heißt ein Problem, das grundsätzlich keine Lösung hat; d.h. wenn kein Algorithmus - also ein effektives deterministisches Verfahren - zu seiner Lösung existiert. Was hier zunächst verblüffend scheint, ist die Tatsache, daß sich im Fall vieler Probleme diese Unlösbarkeit mathematisch exakt beweisen läßt: indem man zeigt, daß es keinen Algorithmus zu ihrer Lösung geben kann. Insofern läßt ein unlösbares Problem sich indirekt als "gelöst" betrachten, sobald der Nachweis seiner Unlösbarkeit gelungen ist.

Nun verwendeten wir bisher alle relevanten Begriffe in einem intuitiven Sinn. So ist, auf dem Weg ihrer Präzisierung, vorweg der Begriff des "Problems" mathematisch zu fassen. Wir erreichen dies, indem wir Probleme als Mengen repräsentieren. Genauer: jedes Problem wird so durch eine Menge natürlicher Zahlen kodiert, daß die Frage seiner Lösbarkeit bzw. Unlösbarkeit gleichbedeutend ist mit der nach der Entscheidbarkeit bzw. Unentscheidbarkeit dieser Menge. Entscheidbar oder r e k u r s i v heißt eine Menge natürlicher Zahlen, wenn für jede beliebige (natürliche) Zahl effektiv entschieden werden kann, ob sie ein Element der Menge ist oder nicht. Nach der geläufigen mathematischen Ausdrucksweise: eine Menge A natürlicher Zahlen ist rekursiv, wenn ihre charakteristische Funktion $c_A: \mathbb{N} \rightarrow \{0,1\}$, berechenbar ist. Der Begriff der berechenbaren Funktion ist dabei identisch mit dem der r e k u r s i v e n F u n k t i o n, wie er - nach einem grundlegenden Resultat der vierziger Jahre dieses Jahrhunderts - von Church, Kleene, Turing, Post und anderen in äquivalenten Formalisierungen präzisiert wurde. Wir setzen diesen formalen Begriff voraus und begnügen uns in dieser Arbeit beim Nachweis der Rekursivität von Funktionen generell mit einer intuitiven Begründung, meist unter Zuhilfenahme der Church'schen These. Zusammenfassend präzisieren wir: Ein Problem heißt r e k u r s i v l ö s b a r, wenn die charakteristische Funktion seiner kodierenden Menge rekursiv ist; sonst r e k u r s i v u n l ö s b a r. Der Übergang von Problemen zu den entsprechenden Mengen wird sich stets als unproblematisch erweisen. In jedem Fall haben wir also, um die rekursive Unlösbarkeit eines Problems zu zeigen,

die Nichtrekursivität der charakteristischen Funktion einer bestimmten Menge zu beweisen.

Unentscheidbarkeitsresultate wurden, wie allgemein bekannt, zuerst in der modernen Logik erzielt. Als eines der wichtigsten Ergebnisse dieser Art bewies A. Church die Unentscheidbarkeit der Quantorenlogik erster Stufe: die Tatsache, daß es kein algorithmisches Verfahren gibt zu entscheiden, ob ein Satz dieses Systems beweisbar ist. Um bei den Beweisen dieses und ähnlicher Resultate die oben erläuterten Begriffe der Rekursionstheorie anwenden zu können, hat man nach einem bestimmten Schema zu verfahren. Dabei werden die wohlgeformten Formeln der formalen Sprache eindeutig durch natürliche Zahlen kodiert ("gödelisiert"). Die einer Formel zugeordnete Zahl heißt deren Gödelnummer. Dann entspricht eine Menge von Formeln einer Menge natürlicher Zahlen, welche der rekursionstheoretischen Behandlung zugänglich ist. Die Eigenschaften bestimmter Mengen von Formeln sind unmittelbar mit den Eigenschaften der ihnen entsprechenden Zahlenmengen zu identifizieren. So werden bei der Untersuchung eines bestimmten logischen Systems gewisse Mengen wohlgeformter Formeln als von einem besonderen Interesse ausgezeichnet. Bestimmte Formeln mögen als "beweisbar" (bezüglich gewisser syntaktischer Regeln des Beweises), andere als "wahr" (bezogen auf eine - gewöhnlich nichtkonstruktive - Wahrheitsdefinition) ausgezeichnet werden. Allgemein heißt eine Menge wohlgeformter Formeln eine Theorie. Entsprechend unseren oben eingeführten Begriffen heißt eine Theorie entscheidbar, wenn die sie kodierende Zahlenmenge rekursiv ist. Somit besagt das erwähnte Theorem von Church, daß die Menge der Gödelzahlen der beweisbaren Formeln der Quantorenlogik nicht rekursiv ist. Nach den Ergebnissen K. Gödels bilden auch die wahren Sätze der elementaren Zahlentheorie, sowie die beweisbaren der Peano-Arithmetik unentscheidbare Theorien.- Beispiele für unlösbare Probleme in der Algebra sind das Zehnte Hilbertsche Problem und das sog. Wortproblem für Gruppen. Es kulminierte hierin eine Reihe von Ergebnissen, in denen sich die Wortprobleme für verschiedene schwächere Arten algebraischer Strukturen als rekursiv unlösbar erwiesen.

Doch werden wir uns in dieser Arbeit bei Beispielen für rekursive Unlösbarkeit auf Probleme aus der Theorie der rekursiven Funktionen selbst beschränken. Wie bereits aus unseren ersten Beispielen hervorgehen wird, ist die Existenz rekursiv unlösbarer Probleme eine unmittelbare und fast triviale Folgerung aus der formalen Charakterisierung der Berechenbarkeit, insbesondere des Begriffs der partiell rekursiven Funktion. So läßt sich bei den ersten Beispielen des folgenden Kapitels rekursive Unlösbarkeit unmittelbar durch einen Widerspruchsbeweis - mithilfe eines Diagonalarguments - demonstrieren: es wird gezeigt, wie die Annahme der rekursiven

Lösbarkeit der Probleme zum Widerspruch führt. Als eines der bekanntesten Beispiele erscheint die rekursive Unlösbarkeit des sog. *H a l t e p r o b l e m s*: der Frage nach einem effektiven Verfahren, welches uns für eine beliebige Turingmaschine und einen beliebigen Input sagt, ob die Maschine einen Output liefert oder nicht. Ihrer Unentscheidbarkeit zufolge gibt es keine Turingmaschine, die das Halteproblem für Turingmaschinen lösen kann. Für jeden Kandidaten einer solchen "Lösungsmaschine" läßt sich ein Fall des Halteproblems angeben, für den er versagt. Das heißt, es gibt eine Turingmaschine, die ausgehend von der Beschreibung einer beliebigen solchen Lösungsmaschine ein geeignetes Gegenbeispiel berechnet. "The halting problem", schreibt H. Rogers, "was one of the first 'natural' combinatorial problems to be shown recursively unsolvable. Demonstration of the existence of easily described recursively unsolvable problems is one of the more striking achievements of twentieth-century mathematics. Prior to such demonstrations (in the 1930's) many mathematicians were unwilling to concede that there could exist easily described combinatorial problems (such as the halting problem) which had no algorithmic solution" (Rogers(1967), S.26).

Doch nicht unlösbare Probleme an sich sind Gegenstand dieser Arbeit, sondern, wie aus unserem Titel hervorgeht, der Begriff ihrer "Reduzierbarkeit". Dieser exemplifiziert sich bereits an den Beispielen des folgenden Kapitels, die unmittelbar an das Halteproblem sowie die als unentscheidbar bewiesene Menge der Indizes der rekursiven Funktionen anschließen. Denn während wir in diesen Fällen rekursive Unlösbarkeit noch direkt durch Widerspruchsbeweise demonstrieren konnten, bedienen wir uns in den folgenden eines indirekten Verfahrens. Wir zeigen, ausgehend von einem Problem, das bereits als unlösbar bekannt ist - nämlich eben dem Halteproblem -, daß die Lösbarkeit des zur Diskussion stehenden Problems die Lösbarkeit des ersteren zur Folge haben würde. Da dieses aber unlösbar ist, muß es selbst ebenfalls unlösbar sein. Wir nennen dieses Verfahren, bei dem ein neues Entscheidungsproblem auf ein bereits bekanntes zurückgeführt wird, das der *R e d u k t i o n*. Das bekannte Problem heißt auf das neue *r e d u z i e r b a r* in dem Sinn, daß die Lösbarkeit des neuen seine Lösbarkeit zur Folge hätte.

Wie Rogers bemerkt, geschieht im Fall mathematischer Probleme außerhalb der Theorie der rekursiven Funktionen der Nachweis rekursiver Unlösbarkeit fast immer durch Reduktion: "The problem in question is related to an unsolvable problem of recursive function theory - usually some form of the halting problem" (a.a.O. S.36). Genauer gesagt: das Halteproblem wird auf das Problem reduziert, dessen Unlösbarkeit gezeigt werden soll. Doch ist, wie bereits unsere Beispiele in Kapitel I beweisen, das Verfahren der Reduktion auch innerhalb der Rekursionstheorie von entscheidender Bedeutung.

Auch bei Problemen in dieser Theorie ist zum Nachweis rekursiver Unlösbarkeit Reduktion häufig bequemer als das direkte Vorgehen. Nicht zuletzt stellt sich in dieser Disziplin die Aufgabe, den - bislang intuitiv verwendeten - Begriff formal zu präzisieren. Da nun Reduzierbarkeit als Beziehung zwischen Problemen definiert werden soll, Probleme aber - gemäß unseren vorhergehenden Ausführungen - in der Frage nach der Entscheidbarkeit von Zahlenmengen bestehen, liegt zwingend der Gedanke nahe, Reduzierbarkeit selbst als eine Relation zwischen Mengen natürlicher Zahlen zu präzisieren. Ein Problem ist dann auf ein anderes reduzierbar zu nennen, wenn ein Verfahren zur Entscheidung der dem zweiten Problem entsprechenden Menge ein Verfahren zur Entscheidung der dem ersten entsprechenden liefert. Das heißt nach unserer Präzisierung des Entscheidbarkeitsbegriffs: wenn aus der Rekursivität der einen Menge die Rekursivität der andern zu erweisen ist. Als e r s t e n o t w e n d i g e B e d i n g u n g, die an eine Präzisierung der Reduzierbarkeitsrelation zu stellen ist, erhalten wir somit, daß, wenn A "reduzierbar auf" B, und B rekursiv ist, auch A als rekursiv zu erweisen sein muß (für Mengen $A, B \subseteq \mathbb{N}$). Jede Relation, welche diesem Kriterium nicht genügt, ist als Präzisierung des Reduzierbarkeitsbegriffs gänzlich unbrauchbar.

Stehe im folgenden die Schreibweise " $A \leq_{\text{red}} B$ " für die Beziehung "A reduzierbar auf B" - im intuitiven, informellen Sinn des Begriffs. Also bezeichnet " $\leq_{\text{red}}$ " eine Relation zwischen Mengen natürlicher Zahlen. Durch konkrete Indizes anstelle von "red", wie "m", "l", "tt" usw., werden wir dann später die verschiedenen Präzisierungen, des Reduzierbarkeitsbegriffs charakterisieren. Aus der Überlegung, daß jedes Problem trivialerweise auf sich selbst reduzierbar ist, ergibt sich, daß, wie immer wir die Relation " $\leq_{\text{red}}$ " präzisieren, sie in jedem Fall r e f l e x i v werden muß. Das heißt, für alle Mengen $A \subseteq \mathbb{N}$ muß gelten $A \leq_{\text{red}} A$. - Ebenso selbstverständlich ist von jeder Präzisierung der Relation $\leq_{\text{red}}$ die T r a n s i t i v i t ä t zu fordern. Denn wenn - für $A, B, C \subseteq \mathbb{N}$ - ein Verfahren zur Entscheidung von B ein Verfahren zur Entscheidung von A, ein Verfahren zur Entscheidung von C aber eines zur Entscheidung von B liefert, dann erhalten wir mit dem Entscheidungsverfahren für C mittelbar auch ein Entscheidungsverfahren für A. Das heißt, für jede Wahl von A, B und C muß gelten: wenn $A \leq_{\text{red}} B$ und $B \leq_{\text{red}} C$, so auch $A \leq_{\text{red}} C$.

Wir nennen zwei Probleme ä q u i v a l e n t, wenn ein Verfahren zur Lösung des einen jeweils ein Verfahren zur Lösung des anderen liefert, mit anderen Worten: wenn sie gegenseitig aufeinander reduzierbar sind. Mit unserer vorläufigen Schreibweise: $A \equiv_{\text{red}} B$ ("A und B sind bzgl. $\leq_{\text{red}}$ äquivalent") gdw. $A \leq_{\text{red}} B$ und $B \leq_{\text{red}} A$. Aufgrund der Reflexivität und Transitivität von $\leq_{\text{red}}$ ist $\equiv_{\text{red}}$ eine Äquivalenzrelation, d.h. eine zweistellige refle-

xive, symmetrische und transitive Relation auf der Potenzmenge der natürlichen Zahlen. Denn da $A \leq_{\text{red}} A$ für jedes $A \in N$, gilt $A \equiv_{\text{red}} A$; also ist $\equiv_{\text{red}}$ reflexiv. Da weiter $A \equiv_{\text{red}} B$ gdw. $A \leq_{\text{red}} B$ und $B \leq_{\text{red}} A$ gdw. $B \leq_{\text{red}} A$ und $A \leq_{\text{red}} B$, gilt $\equiv_{\text{red}}$ symmetrisch. Und für $A \equiv_{\text{red}} B$ und $B \equiv_{\text{red}} C$, d.h. $A \leq_{\text{red}} B$ und $B \leq_{\text{red}} C$ sowie $B \leq_{\text{red}} C$ und $C \leq_{\text{red}} B$, folgt wegen der Transitivität von $\leq_{\text{red}}$ sowohl $A \leq_{\text{red}} C$ als auch $C \leq_{\text{red}} A$, d.h. $A \equiv_{\text{red}} C$; also ist $\equiv_{\text{red}}$ transitiv. Die Äquivalenzklassen von $\equiv_{\text{red}}$, i.e. die Klassen der Form $d_{\text{red}}(A) := \{B \mid A \equiv_{\text{red}} B\}$ für beliebiges $A \in N$, werden **G r a d e d e r U n l ö s b a r k e i t** ("degrees of unsolvability", engl.) bzw. **U n l ö s b a r k e i t s g r a d e** bzw. $\leq_{\text{red}}$ genannt. Ein Unlösbarkeitsgrad ist somit eine Klasse von Problemen, die jeweils alle aufeinander reduzierbar sind. Da, wie zuvor erklärt, aus der Reduzierbarkeit einer Menge auf eine rekursive Menge notwendigerweise ihre Rekursivität folgt, muß jeder Grad, der eine rekursive Menge enthält, ausschließlich aus rekursiven Mengen bestehen. Es läge daher nahe, solche Grade "Grade der Lösbarkeit" zu nennen. Doch ist üblich, schlechthin von Graden der Unlösbarkeit zu sprechen.

Wir beschrieben die Reduktion bisher als eine Methode, die rekursive Unlösbarkeit von Problemen zu beweisen. Dabei war ein bereits als unlösbar bekanntes Problem auf das neue, noch strittige zu reduzieren. Doch ist die Reduktionsmethode nicht nur für den Nachweis rekursiver Unlösbarkeit interessant. Reduzierbarkeit von Problemen ist ganz unabhängig von deren Lösbarkeit oder Unlösbarkeit definiert. Zwar folgt aus ihrem Begriff - genauer: aus der oben als erste konstatierten notwendigen Bedingung - , daß kein unlösbares Problem auf ein lösbares reduzierbar sein kann; doch ist umgekehrt für die Reduktion **a u f** unlösbare Probleme keinerlei Einschränkung gefordert. So wäre von einer genügend allgemeinen Präzisierung des Reduzierbarkeitsbegriffs zu erwarten, daß eine rekursive Menge auf jede andere reduzierbar ist - gemäß der Intuition, daß ein lösbares Problem auf jedes andere, lösbar oder nicht, trivialerweise reduziert werden kann. Wird ein Problem A auf ein unlösbares Problem B reduziert, so ist dies - da dann die Entscheidbarkeit von B die Entscheidbarkeit von A impliziert - dahingehend zu deuten, daß B "mindestens ebenso unlösbar" ist wie A. Jedes unlösbare Problem ist demnach mindestens ebenso unlösbar wie ein lösbares. Gilt dagegen im Fall zweier unlösbarer Probleme A und B, daß A auf B reduzierbar ist, nicht aber umgekehrt, so erscheint B sozusagen "unlösbarer" als A. Als Ergebnis solcher Reduktionen erhalten wir dann - da das Problem, auf welches reduziert wird, ja bereits unlösbar ist - kein neues Unentscheidbarkeitsresultat, sondern eine Differenzierung zwischen unlösbaren Problemen selbst. In dieser wird deutlich, was wir den **i n t e n s i o n a l e n C h a r a k t e r** des Reduzierbarkeitsbegriffs nennen könnten. Da einige Probleme in diesem Sinn "mehr oder weniger

unlösbar" sind als andere, stellt sich zwischen ihnen eine gewisse Rangordnung her. Ein Problem steht "unter" oder "über" einem anderen, auf gleicher Stufe mit ihm, oder beide sind - wenn Reduzierbarkeit in keiner Richtung möglich ist - unvergleichbar. Da zwei Probleme, die wechselseitig aufeinander reduzierbar sind, definitionsgemäß in demselben Unlösbarkeitsgrad liegen, überträgt sich ihre Hierarchie direkt auf ihre Grade. Dies ist der intuitive Hintergrund dessen, was wir als **R e d u z i e r b a r k e i t s o r d n u n g** präzisieren.

Betrachten wir nämlich die Klasse $\mathcal{D}_{\text{red}}$ aller Unlösbarkeitsgrade bzgl. $\leq_{\text{red}}$, also $\mathcal{D}_{\text{red}} := \{d_{\text{red}}(A) \mid A \in N\}$, so können wir zwei beliebige Elemente von $\mathcal{D}_{\text{red}}$ daraufhin untersuchen, ob ein Element des einen auf ein Element des anderen reduzierbar ist. Ist dies der Fall, so nennen wir diese Grade **v e r - g l e i c h b a r** (bzgl. $\leq_{\text{red}}$), sonst **u n v e r g l e i c h b a r**. Präzisieren wir die Vergleichbarkeit formal mit: $d_{\text{red}}(A) \leq_{\text{red}} d_{\text{red}}(B) : \text{gdw.}$
 $A \leq_{\text{red}} B$, so erhalten wir in $\leq_{\text{red}}$ eine partielle Ordnung, d.h. eine reflexive, transitive und antisymmetrische Relation auf $\mathcal{D}_{\text{red}}$. Partiiell ist $\leq_{\text{red}}$, da zwei beliebige Elemente $d_{\text{red}}(A)$ und $d_{\text{red}}(B)$ aus $\mathcal{D}_{\text{red}}$ nicht unbedingt vergleichbar zu sein brauchen, d.h. zwischen ihnen nicht unbedingt eine der beiden Beziehungen $d_{\text{red}}(A) \leq_{\text{red}} d_{\text{red}}(B)$ oder $d_{\text{red}}(B) \leq_{\text{red}} d_{\text{red}}(A)$ zu gelten braucht. Mithin sind es genau die bzgl. $\leq_{\text{red}}$ unvergleichbaren Grade, für welche die Relation $\leq_{\text{red}}$ nicht definiert ist. Gilt $d_{\text{red}}(A) <_{\text{red}} d_{\text{red}}(B)$, d.h. per definitionem $d_{\text{red}}(A) \leq_{\text{red}} d_{\text{red}}(B)$ und nicht $d_{\text{red}}(B) \leq_{\text{red}} d_{\text{red}}(A)$, so sagen wir, daß $d_{\text{red}}(A)$ **u n t e r** $d_{\text{red}}(B)$, bzw. $d_{\text{red}}(B)$ **ü b e r** $d_{\text{red}}(A)$ liegt, bzw. daß A von **n i e d r i g e r e m** red-Grad ist als B, oder B von **h ö h e r e m** red-Grad als A. Da alle Elemente eines red-Grades definitionsgemäß miteinander äquivalent sind, folgt aus $d_{\text{red}}(A) <_{\text{red}} d_{\text{red}}(B)$, daß jedes Element von $d_{\text{red}}(A)$ auf jedes Element von $d_{\text{red}}(B)$ reduzierbar ist, während gleichzeitig kein Element von $d_{\text{red}}(B)$ auf eines von $d_{\text{red}}(A)$ reduzierbar sein kann. Die so definierte partielle Ordnung $\leq_{\text{red}}$ auf $\mathcal{D}_{\text{red}}$ heißt die **R e d u - z i e r b a r k e i t s o r d n u n g** v o n $\leq_{\text{red}}$ und bildet - für die verschiedenen Präzisierungen von $\leq_{\text{red}}$ - einen wesentlichen Gegenstand unserer Untersuchung.

Im Hinblick auf die Reduzierbarkeitsgrade ergibt sich eine Reihe weiterer, wenn nicht notwendiger, so doch intuitiv naheliegender und daher wünschenswerter Bedingungen, denen eine Präzisierung der Relation $\leq_{\text{red}}$ genügen sollte. So scheint es plausibel zu fordern, daß eine Menge A und ihr Komplement $\bar{A}$ stets in demselben Grad liegen sollen. Denn da $x \in A \iff \text{non}(x \in \bar{A})$ für alle $x \in N$, bzw. $c_A = \overline{c_{\bar{A}}}$ mit

$\bar{c}_A(x) = 1$ gdw. $c_A(x) = 0$ und $\bar{c}_A(x) = 0$ gdw. $c_A(x) = 1$ für alle $x \in N$, ist jede Menge A trivialerweise auf ihr Komplement reduzierbar und umgekehrt. - Desgleichen wäre zu verlangen, daß alle rekursiven Mengen in ein- und demselben Grad liegen sollen. Denn für zwei beliebige rekursive Mengen A und B soll gemäß einem bereits oben diskutierten Kriterium sowohl $A \leq_{\text{red}} B$ (da A rekursiv), als auch $B \leq_{\text{red}} A$ (da B rekursiv), und damit $A \equiv_{\text{red}} B$ gelten. Als ein mit allen Graden vergleichbarer hätte folglich der Grad der rekursiven Mengen das kleinste Element in der Reduzierbarkeitsordnung zu sein. - Wünschenswert wäre schließlich noch, daß für beliebige Mengen A, B mit $A \leq_{\text{red}} C$ und $B \leq_{\text{red}} C$ (für eine gegebene Menge C) auch deren Durchschnitt $A \cap B$ und Vereinigung $A \cup B$ auf C reduzierbar sind. Denn um unter der Voraussetzung, daß C entscheidbar, für beliebiges x zu entscheiden, ob $x \in A \cap B$ (bzw. $x \in A \cup B$), entscheide zuerst, ob $x \in A$ und $x \in B$. Gilt eines von beidem, so $x \in A \cup B$; gilt beides zugleich, so $x \in A \cap B$. Da gemäß einer vorangehenden Forderung $A \equiv_{\text{red}} \bar{A}$ für alle Mengen A , also mit $A \leq_{\text{red}} B$ auch $\bar{A} \leq_{\text{red}} B$ (insbesondere, da N und $\emptyset$ rekursiv, $N \leq_{\text{red}} B$ und $\emptyset \leq_{\text{red}} B$) (für beliebiges B). Wir können daher erwarten, daß im Fall einer genügend allgemeinen Präzisierung von $\leq_{\text{red}}$ für eine beliebige Menge A die Klasse $\mathcal{L}_{\text{red}}(A)$ aller auf A reduzierbaren Mengen, d.h. $\mathcal{L}_{\text{red}}(A) = \{B \mid B \leq_{\text{red}} A\}$, eine Boolesche Algebra (bzgl. der Operationen $\cap$ und $\cup$) bildet.

Wie ist nun - unter Berücksichtigung aller dieser mehr oder minder dringlichen Postulate - die Reduzierbarkeitsrelation $\leq_{\text{red}}$ zu präzisieren? Die verschiedenen hierfür bestehenden Möglichkeiten - ihre Motivation, die daraus resultierenden formalen Reduzierbarkeitsbegriffe und ihr Vergleich - bilden den eigentlichen Gegenstand dieser Arbeit. Gemäß unserem intuitiven Begriff hieß A reduzierbar auf B , wenn die Rekursivität der charakteristischen Funktion von B die Rekursivität der charakteristischen Funktion von A liefert. Hierin ist "liefern" unpräzise, und es ist klar, daß die Problematik einer Formalisierung des Reduzierbarkeitsbegriffs in der Präzisierung eben dieses Ausdrucks besteht. Einer der einfachsten Fälle, in denen die Funktion c_A sich mithilfe von c_B berechnen läßt, liegt offenbar dann vor, wenn c_A als Komposition von c_B und einer berechenbaren Funktion darstellbar ist. Wir nennen diese die "Reduktionsfunktion". So gelangen wir zur - auf E.L.Post zurückgehenden - Definition der $m-1$ -Reduzierbarkeit (von engl. "many-one-reducibility"), die wir in Kapitel II behandeln. In der Tat werden sich all unsere Beispiele intuitiver Reduktionen in Kapitel I im nachhinein als $m-1$ -Reduktionen erweisen. Durch die zusätzliche Forderung der Injektivität der Reduktionsfunktion erhalten wir als eingeschränkten Begriff den der $1-1$ -Reduzierbarkeit (von engl. "one-one-reducibility") in Kapitel III.

breiten Raum widmen wir darin - anhand des von H. Rogers definierten Begriffs des Zylinders - dem Vergleich mit der m -1-Reduzierbarkeit. In Fällen besonderen Interesses fallen $\leq_m$ und $\leq_1$ (- so unsere Zeichen für m -1- und 1-1-Reduzierbarkeit als erste Präzisierungen von $\leq_{red}$) häufig zusammen. Gewöhnlich läßt sich auch $\leq_1$ zeigen, sobald einmal $\leq_m$ erwiesen ist. Daher werden $\leq_m$ und $\leq_1$ zuweilen als die **starken Reduzibilitäten** zusammengefaßt. - Schon aus der einfachen Beobachtung, daß im Fall der m -1-Reduzierbarkeit keine einzige der zuletzt genannten Bedingungen erfüllt ist, geht hervor, daß $\leq_m$ und $\leq_1$ als Präzisierungen des intuitiven Reduzierbarkeitsbegriffs noch bei weitem zu eng gefaßt sind. Dementgegen genügt die in Kapitel IV getroffene allgemeinere Präzisierung der - ebenfalls von Post stammenden - **Wahrheitstafel - (bzw. wahrheitsfunktionalen) Reduzierbarkeit** (in Zeichen: $\leq_{tt}$, von engl. "truth-table-reducibility") allen diesen Kriterien. Dies gilt bereits für eine naheliegende Einschränkung des Begriffs, die **beschränkte Wahrheitstafel-Reduzierbarkeit** (in Zeichen: $\leq_{btt}$, von engl. "bounded truth-table reducibility"), welche wir in Kapitel V behandeln. Erst mithilfe einer relativ komplizierten, sog. "schlichten" Menge können wir den Unterschied von $\leq_{tt}$ und $\leq_{btt}$ demonstrieren. - Da die bisher genannten Präzisierungen zunehmend allgemeiner werden, ergibt sich die folgende Kette von Implikationen unter den formalen Reduzierbarkeitskonzepten: $\leq_1 \Rightarrow \leq_m \Rightarrow \Rightarrow \leq_{btt} \Rightarrow \leq_{tt}$. Dagegen fügt sich die in Kapitel VI als **q -Reduzierbarkeit** definierte Modifikation von $\leq_{btt}$ nicht in diese Kette. Da die tt -Reduzierbarkeit scheinbar alle an eine Präzisierung des intuitiven Begriffs zu richtenden Forderungen erfüllt, kommt das einfache Beispiel zweier Mengen, die, obgleich intuitiv, doch nicht tt -reduzierbar aufeinander sind, einigermaßen Überraschend. Es beweist, daß auch $\leq_{tt}$ noch zu eng ist, um den intuitiven Begriff befriedigend zu repräsentieren. So gelangen wir erst durch eine Formalisierung des Begriffs des sog. "relativen Algorithmus" in Kapitel VII zur Definition der **Turing-Reduzierbarkeit** (in Zeichen: $\leq_T$, von engl. "Turing reducibility"), welche - gemäß der sog. "Relativierten These von Church" - als allgemeinste Präzisierung des intuitiven Reduzierbarkeitsbegriffs gilt.

Als Kern der Arbeit erscheint Kapitel VII nicht nur wegen des darin behandelten allgemeinsten Reduzierbarkeitsbegriffs, sondern zumal aufgrund der - in der Überschrift angesprochenen - ausführlichen Diskussion seiner rein syntaktischen, formal unterschiedlichen Präzisierungen, welche in dieser erstrebten Vollständigkeit unseres Wissens nach bislang noch nicht ausgeführt wurde. Dabei ist mit §7.1 ein eigener Paragraph der Strategie unserer Überlegungen gewidmet. Ausgehend von der Präzisierung der Turing-Reduzierbarkeit als $\leq_T$ über sog. "reguläre" Mengen in Rogers(1967) zeigen wir, daß mit

dieser Formalisierung der Verfasser seiner eigentlichen Intention - i.e. der Kodierung der Arbeitsweise von Turingmaschinen mit Orakel mithilfe geeigneter rekursiv aufzählbarer Mengen - nicht gerecht wird. Bezeichnen wir - im Rückgriff auf die ursprüngliche Präzisierung relativer Algorithmen durch Orakelmaschinen - die partielle Funktion, welche von der Maschine mit dem Index z relativ zur Menge X berechnet wird, mit ψ_z^X , so schreiben wir als Präzisierung $A \leq_0 B$, falls $c_A = \psi_z^B$ für einen geeigneten Maschinenindex z . Wie wir nun anhand eines Gegenbeispiels zeigen, erweist sich der - von Rogers M. Blum zugeschriebene - Satz, daß jede reguläre Menge das Diagramm der Berechnung einer Orakelmaschine kodiere, als falsch. Dadurch ist die Äquivalenz von $\leq_0$ und $\leq_T$ nicht mehr unmittelbar ersichtlich. Wir korrigieren daher Rogers' Ansatz - nach einem Vorschlag von U. Blau - vermöge der Definition sog. "stark regulärer" Mengen und der durch sie induzierten Präzisierung (in Zeichen $\leq_B$), für welche sich dann die korrigierte Fassung des Satzes von Blum tatsächlich beweisen läßt. Nachdem wir dergestalt die Bedingung der Regularität von Mengen durch die der starken Regularität zu ersetzen hatten, untersuchen wir die dazu komplementäre Frage: inwieweit sie, die im nachhinein als weitgehend unmotiviert erscheint, abgelehnt werden kann, wofern noch eine gültige Präzisierung über rekursiv aufzählbare Mengen gewährleistet sein soll. Dabei ergibt sich eine Divergenz der Begriffe. Denn während wir im Fall der Präzisierung allein von Reduzierbarkeit auf beliebig rekursiv aufzählbare Mengen zurückgreifen dürfen - was uns zur Definition der Relation $\leq_w$ führt -, sind wir für den Fall einer gleichzeitigen Präzisierung auch des relativen Algorithmus (i.e. der in X partiell rekursiven Funktion) auf gewisse Einschränkungen verwiesen. So gelangen wir über die Definition sog. "schwach regulärer" Mengen zur Präzisierung $\leq_B$. Schließlich ist es über diese definitorische Klärung hinaus ein wesentliches Anliegen des Kapitels, rein formal - d.h. ohne die Zuhilfenahme der Relativierten These von Church - die Äquivalenz der so resultierenden Präzisierungen $\leq_0$, $\leq_B$, $\leq_T$, $\leq_S$ und $\leq_w$ der Turing-Reduzierbarkeit zu beweisen.-

Kapitel VIII gilt den Eigenschaften dieser allgemeinsten Reduzierbarkeitsrelation, sowie ihren Beziehungen zu den vorhergehenden, engeren Präzisierungen.- Kapitel IX schließlich behandelt einen Begriff, der, obgleich eng verknüpft mit den früheren Konzepten, etwas umfassender ist als unsere Vorstellung von Reduzierbarkeit im eigentlichen Sinn. Wenn wir dabei dennoch - mit Rogers(1967) - von Aufzählungsreduzierbarkeit sprechen (in Zeichen $\leq_e$), so um seine natürliche Verwandtschaft zu den diversen Reduzibilitäten zu unterstreichen, wie sie in seinen diskutierten Eigenschaften zum Ausdruck kommt. Insbesondere ist dabei von Interesse, wie sich die einzelnen Präzisierungen durch sog. rekursive Operatoren charakterisieren lassen.

§1.1 Das Halteproblem. Diagonalargumente. Die Indizes der totalen Funktionen

Die Existenz rekursiv unlösbarer Probleme ist, wie wir schon in der Einleitung bemerkten, eine unmittelbare und fast triviale Folge der formalen Charakterisierung des Begriffs der partiell rekursiven Funktion. Mit Rogers (1967) gehen wir von der Charakterisierung durch Turingmaschinen aus. Es ist möglich, all die Mengen von Vorschriften, welche Turingmaschinen definieren, effektiv aufzulisten. Wir betrachten dies als einen Vorgang, bei dem jeder natürlichen Zahl x diejenige Menge von Vorschriften zugeordnet wird, die in der Liste aller Vorschriftsmengen an $(x+1)$ -ter Stelle steht. Wir nehmen an, wir hätten solch ein Verfahren gewählt, und halten es für den Rest dieser Arbeit fest. Zu Turingmaschinen und ihrer Gödelisierung vergleiche die schöne Darstellung in Hermes(1970).

Sei P_x die Menge von Vorschriften, die in der Aufzählung der Zahl x zugeordnet ist. Die Zahl x heißt der Index oder die Gödelzahl von P_x . Dann sei $\varphi_x^{(k)}$ die partielle Funktion von k Veränderlichen, welche durch P_x bestimmt ist; x heißt auch ein Index oder eine Gödelzahl von $\varphi_x^{(k)}$. Das hochgestellte " (k) " entfällt, wenn $k=1$, oder die Stellenzahl aus dem Zusammenhang hervorgeht. Meistens haben wir es mit Funktionen einer Variablen zu tun.- Der Wert der (einstelligen) partiell rekursiven Funktion φ_x für ein beliebiges Argument $y \in \mathbb{N}$ ist also durch das folgende Verfahren bestimmt. Wir geben der Turingmaschine mit dem Index x (repräsentiert durch die Vorschriftsmenge P_x) y als Input ein und starten mit der Rechnung. Liefert sie einen Output, so ist $\varphi_x(y)$ gleich diesem; wenn nicht, so ist $\varphi_x(y)$ undefiniert. Immer erhalten wir, falls $\varphi_x(y)$ definiert, diesen Wert nach endlich vielen Rechenschritten.- Doch liefert unsere Aufzählung nicht nur ein Verfahren, von einem beliebigen x zum entsprechenden P_x Überzugehen, sondern ebenso eines, um aus jeder geeigneten Menge P von Vorschriften das entsprechende x mit $P=P_x$ zu ermitteln.

Unsere Gödelisierung zeigt, daß es höchstens abzählbar unendlich viele partiell rekursive Funktionen gibt. Da umgekehrt bereits alle konstanten Funktionen rekursiv sind, müssen auch mindestens so viele existieren. Folglich gibt es genau abzählbar unendlich viele partiell rekursive Funktionen, sowie genau abzählbar unendlich viele rekursive Funktionen. Da nach dem Satz von Cantor insgesamt aber überabzählbar viele Funktionen von $\mathbb{N}$ in $\mathbb{N}$ existieren, muß es Funktionen geben, die nicht rekursiv sind. Klar ist, daß jede partiell rekursive Funktion höchstens abzählbar unendlich viele Indizes haben kann. Daß sie umgekehrt auch mindestens so viele besitzt,

liegt daran, daß man jede Menge P_x durch Hinzunahme beliebig vieler "leerer" Vorschriften erweitern kann, ohne damit an der durch sie definierten Funktion etwas zu ändern. Folglich hat jede partiell rekursive Funktion genau abzählbar unendlich viele Indizes.

Schließlich erwähnen wir noch das auf Kleene(1952) zurückgehende s-m-n-Theorem, das wir, zusammen mit der These von Church, im folgenden häufig benutzen werden:

s-m-n-Theorem: Für alle $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m, n \geq 1$ gibt es eine rekursive Funktion s_n^m von $m+1$ Variablen derart, daß für alle $x, y_1, \dots, y_m \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\lambda z_1 \dots z_n [\varphi_x^{(m+n)}(y_1, \dots, y_m, z_1, \dots, z_n)] = \varphi_{s_n^m(x, y_1, \dots, y_m)}^{(n)}.$$

Das s-m-n-Theorem besagt somit - in der üblichen λ -Notation von (hier n-stelligen) Funktionen -, daß man von einer beliebig-stelligen partiell rekursiven Funktion - in Abhängigkeit von ihrem Index und beliebig vielen ihrer Argumentstellen - effektiv übergehen kann zu der partiell rekursiven Funktion einer geringeren Argumentstellenzahl, welche entsteht, wenn man diese Argumente festhält. - Im Fall von $m=n=1$, wofür wir den Satz vor allem verwenden werden, lautet er insbesondere: Es gibt eine rekursive Funktion s von zwei Variablen derart, daß für alle $x, y \in \mathbb{N}$ gilt: $\lambda z [\varphi_x^{(2)}(y, z)] = \varphi_{s(x, y)}^1$. Das heißt - wieder in der geläufigen λ -Schreibweise hier ein-stelliger Funktionen, wie wir sie auch im folgenden durchwegs benutzen werden -, wir können von einer zwei-stelligen partiell rekursiven Funktion - in Abhängigkeit von ihrem Index und einer ihrer Variablen - effektiv zu der ein-stelligen partiell rekursiven Funktion gelangen, welche entsteht, wenn man die zweite Variable festhält.

Aufgrund vorstehender Charakterisierung der partiell rekursiven Funktionen ergeben sich die nun folgenden Beispiele für rekursive Unlösbarkeit. Sie alle stehen in Zusammenhang mit der allgemeinen Frage, wieviel sich ausgehend von einer beliebigen Menge von Vorschriften P_x über das Verhalten der durch sie definierten partiell rekursiven Funktion $\varphi_x^{(k)}$ aussagen läßt. So stellt das sogenannte Halteproblem

- (1) die Frage nach einem effektiven Verfahren, mit dem wir für beliebig gegebene Zahlen x und y zu entscheiden vermögen, ob der Wert $\varphi_x(y)$ definiert ist; d.h. ob die Turingmaschine mit dem Index x in Anwendung auf den Input y einen Output liefert.

Unseren Ausführungen in der Einleitung entsprechend haben wir das Problem zunächst in eine präzise Form zu bringen. Dies geschieht, indem wir es durch eine Menge kodieren. Da es bei gegebenem x im allgemeinen von der Wahl von y , und umgekehrt bei gegebenem y von der Wahl von x abhängt, ob φ_x an der Stelle

y definiert ist oder nicht, ist die Entscheidung offenbar von beiden Zahlen abhängig, weswegen die dem Problem korrespondierende Menge eine Menge von Zahlenpaaren sein wird. So soll ein beliebiges geordnetes Paar (x,y) natürlicher Zahlen dann und nur dann ein Element der Menge sein, wenn $\varphi_x(y)$ definiert ist. Mit $H = \{(x,y) \mid \varphi_x(y) \text{ ist definiert}\}$ erhalten wir die Äquivalenz: $\varphi_x(y)$ definiert $\iff (x,y) \in H$. Für $g := c_H$ folgt damit: $\varphi_x(y)$ definiert $\iff g(x,y)=1$, und: $\varphi_x(y)$ undefiniert $\iff g(x,y)=0$. Mithilfe dieser Präzisierung ausgedrückt, ist das Halteproblem genau dann lösbar, wenn g rekursiv ist. Daß dem nicht so ist, besagt

Satz 1: Es gibt keine rekursive Funktion g derart, daß für alle $x,y \in \mathbb{N}$

$$g(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } \varphi_x(y) \text{ definiert;} \\ 0, & \text{wenn } \varphi_x(y) \text{ undefiniert.} \end{cases}$$

Beweis: Indirekt. Angenommen, es existiert solch eine rekursive Funktion g .

Dann definieren wir damit eine partielle Funktion ψ wie folgt:

$$\psi(x) := \begin{cases} 1, & \text{wenn } g(x,x)=0; \\ \text{undefiniert,} & \text{wenn } g(x,x)=1. \end{cases}$$

Da $g(x,x)=0$ oder $g(x,x)=1$ für alle x , ist ψ als einstellige Funktion wohldefiniert. Außerdem ist, falls ψ an der Stelle x definiert - wenn also $g(x,x)=0$, was nach Voraussetzung über g effektiv entscheidbar -, der Wert $\psi(x)$ berechenbar - nämlich als $\psi(x)=1$. Also ist ψ nach der Church'schen These partiell rekursiv. Anhand unserer Liste aller partiell rekursiven Funktionen können wir daher effektiv einen Index für ψ ermitteln. Gelte etwa $\psi = \varphi_{y_0}$. Dann ist per definitionem φ_{y_0} genau dann an der Stelle y_0 definiert, wenn $g(y_0, y_0)=0$ gilt. Andererseits ist nach Definition $g(y_0, y_0)=0$ gdw. φ_{y_0} an der Stelle y_0 undefiniert ist. Also gilt: $\varphi_{y_0}(y_0)$ definiert $\iff \varphi_{y_0}(y_0)$ undefiniert. Dieser Widerspruch zeigt, daß es kein solches g geben kann, womit der Satz bewiesen ist.

Neben (1) stellt das Halteproblem in einer etwas spezielleren Form

(1') die Frage nach einem effektiven Verfahren, um für eine beliebige Zahl x zu entscheiden, ob der wert $\varphi_x(x)$ definiert ist; d.h. allgemeiner, ob eine Turingmaschine in Anwendung auf ihren eigenen Index einen Output liefert.

Die Menge, durch welche das Halteproblem (1') kodiert wird, erhält aufgrund ihrer herausragenden Bedeutung in unserer Theorie einen eigenen Namen, mit dem wir uns von nun an auf sie beziehen. Wir definieren

$$K := \{x \mid \varphi_x(x) \text{ definiert}\}.$$

Das folgende Korollar zeigt, daß auch das Halteproblem in seiner spezielleren Form rekursiv unlösbar, d.h. die Menge K nicht rekursiv ist.

Korollar: Es gibt keine rekursive Funktion f derart, daß für alle $x \in \mathbb{N}$

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } \varphi_x(x) \text{ definiert;} \\ 0, & \text{wenn } \varphi_x(x) \text{ undefiniert.} \end{cases}$$

Beweis: Angenommen, es existiert solch ein f . Definiere für alle x

$$\psi(x) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } f(x)=0; \\ \text{undefiniert,} & \text{wenn } f(x)=1. \end{cases}$$

Dann ist ψ partiell rekursiv, und für $\psi = \varphi_{y_0}$ gilt: $\varphi_{y_0}(y_0)$ definiert $\Leftrightarrow \Leftrightarrow f(y_0)=0 \Leftrightarrow \varphi_{y_0}(y_0)$ undefiniert. Widerspruch.

Wir werden, wenn wir im folgenden ohne genauere Differenzierung vom "Halteproblem" sprechen, uns auf seine Form (1'), bzw. die ihm korrespondierende Menge K beziehen. Andernfalls bemerken wir es eigens.

Beide Beweise, der des Satzes sowohl als auch der des Korollars, verliefen nach demselben Muster. Ausgehend von der hypothetischen Existenz der rekursiven Funktionen g und f gelangen wir zu einem partiell rekursiven ψ , das für ein Argument x genau dann definiert ist, wenn die partiell rekursive Funktion φ_x für ihren eigenen Index als Argument undefiniert ist. Dann ergibt sich der Widerspruch, daß ψ für ihre eigenen Indizes genau dann definiert ist, wenn sie für sie undefiniert ist. Beweismethoden dieser Art heißen **D i a - g o n a l a r g u m e n t e**. Sie sind anwendbar auf eine Vielzahl formal charakterisierter Klassen algorithmischer Funktionen und erzeugen in jedem Fall eine algorithmische Funktion, welche aus der gegebenen Klasse herausfällt. In den vorigen Beispielen ist ψ diese Funktion. Noch naheliegender fast ist sie im Fall des folgenden Problems, das sich auf die Indizes der rekursiven als der auf ganz $\mathbb{N}$ definierten partiell rekursiven Funktionen bezieht:

(2) Gibt es ein effektives Verfahren, um für beliebiges x zu entscheiden, ob φ_x eine totale Funktion ist?

Angenommen nämlich, es gäbe solch ein Verfahren. Dann könnten wir aus unserer Liste der partiell rekursiven Funktionen all jene aussondern, die total definiert sind, und so zu einer Aufzählung $f_1, f_2, f_3, \dots$ aller rekursiven Funktionen gelangen. Damit ließe sich durch $g(x) := f_x(x)+1$ (für alle $x=1,2,\dots$) eine neue totale Funktion g definieren. Da für jedes x die Funktion f_x rekursiv ist, wäre trivialerweise auch g rekursiv. Folglich müßte g in der Aufzählung der f_n bereits vorkommen; d.h. es gäbe ein $n \in \mathbb{N}$ mit $g = f_n$. Dann aber ergäbe sich bei Anwendung von g auf ihren eigenen Index mit $f_n(n) = g(n) = f_n(n)+1$ ein offenkundiger Widerspruch. Mithin kann es kein solches Verfahren, die Indizes der totalen Funktionen zu entscheiden, geben. Etwas formaler beweisen wir dies mit dem folgenden Satz.

Satz 2: Es gibt keine rekursive Funktion f derart, daß für alle x

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } \varphi_x \text{ total;} \\ 0, & \text{wenn } \varphi_x \text{ nicht total.} \end{cases}$$

Beweis: Angenommen, solch ein f existiert. Definiere rekursiv eine Funktion g wie folgt: $g(0) := \mu y [f(y)=1]$,

$$g(x+1) := \mu y [y > g(x) \ \& \ f(y)=1].$$

(Hierbei bezeichne μ den μ -O p e r a t o r, wie er in der Theorie der rekursiven Funktionen üblicherweise verwendet wird: $\mu x [...x...]$ ist die kleinste Zahl derart, daß der Ausdruck "...x..." wahr wird, - wenn diese existiert; sonst undefiniert.) Da es mindestens eine rekursive Funktion gibt, die dann - nach einer früheren Bemerkung - unendlich viele Indizes besitzt, folgt $f(y)=1$ für unendlich viele y . Daher ist g total. Da weiterhin die Werte $f(0), f(1), \dots$ nach Voraussetzung berechenbar sind, lassen sich die y mit $f(y)=1$ der Größe nach aussortieren, wodurch g rekursiv wird. Die Funktion g zählt, sozusagen, die Indizes aller rekursiven Funktionen auf.

Definiere nun eine weitere Funktion h durch $h(x) = \mathcal{P}_{g(x)}(x)+1$ für alle x . Da nach Definition von g die partiell rekursive Funktion $\mathcal{P}_{g(x)}$ für jedes x total ist, liefert $\mathcal{P}_{g(x)}(x)+1$ für alle x einen berechenbaren Wert. Daher ist h rekursiv. Sei $h = \mathcal{P}_z$. Da dann z_0 Index einer rekursiven Funktion ist, existiert das Urbild von z_0 unter g , $y_0 := g^{-1}(z_0)$. Nach Definition von h gilt nun: $h(y_0) = \mathcal{P}_{g(y_0)}(y_0)+1$; andererseits aber nach Definition von y_0 : $h(y_0) = \mathcal{P}_z(y_0) = \mathcal{P}_{g(g^{-1}(z_0))}(y_0) = \mathcal{P}_{g(y_0)}(y_0)$ - Widerspruch.

§1.2 Weitere Unlösbarkeitsresultate durch Reduktion. Metaprobleme

Während wir die rekursive Unlösbarkeit der bisherigen Beispiele direkt - mithilfe von Diagonalargumenten - beweisen konnten, zeigen wir - wie bereits in der Einleitung angedeutet - die der nun folgenden dadurch, daß wir das Halteproblem (i.e. das des Korollars in §1.1) auf sie reduzieren - im bislang immer noch informellen Sinn des Begriffs. Wir fahren in der Numerierung von §1.1 fort.

- (3) Ist entscheidbar, ob für beliebiges x $\mathcal{P}_x$ eine konstante Funktion ist?
 - (4) Ist entscheidbar, ob für beliebige x und y $y \in \text{range } \mathcal{P}_x$?
 - (5) Ist entscheidbar, ob für beliebige x, y und z $\mathcal{P}_x(y)=z$?
 - (6) Ist entscheidbar, ob für beliebige x und y $\mathcal{P}_x = \mathcal{P}_y$?
 - (7) Ist entscheidbar, ob für beliebige x $\text{range } \mathcal{P}_x$ unendlich?
 - (8) Ist entscheidbar, ob - bei festem y_0 - für beliebige x $y_0 \in \text{range } \mathcal{P}_x$?
- (Dabei bezeichne " $\text{range } \mathcal{P}_x$ " den Wertebereich bzw. das Bild der partiell rekursiven Funktion $\mathcal{P}_x$.)

Satz 1: Die Probleme (3)-(7) sind rekursiv unlösbar.

Desgleichen ist Problem (8) für jede Wahl von y_0 rekursiv unlösbar.

Beweis: Wir haben zu zeigen, daß die den Problemen jeweils entsprechenden

Mengen nicht rekursiv sind. Dazu gehen wir von der Annahme ihrer Rekursi-

vität aus, um eine zu " $\varphi_x(x)$ ist definiert" äquivalente Bedingung zu finden, welche aufgrund der Voraussetzung entscheidbar ist. Daraus läßt sich unmittelbar eine rekursive charakteristische Funktion von K konstruieren. Da K nicht rekursiv, folgt dann jeweils die Nichtentscheidbarkeit der Ausgangsmenge.

Zu (3): Angenommen, $\{x \mid \varphi_x \text{ konstant}\}$ ist rekursiv. Sei f_3 ihre charakteristische Funktion, also

$$f_3(x) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } \varphi_x \text{ konstant;} \\ 0, & \text{wenn } \varphi_x \text{ nicht konstant.} \end{cases}$$

Definiere eine partielle Funktion ψ von zwei Variablen durch folgendes Verfahren: Suche zu gegebenem Paar (x,y) die Vorschriftenmenge P_x und wende sie auf x als Input an. Wenn die Berechnung terminiert, und nur dann, liefere 0 als Output; sonst sei ψ undefiniert. Also

$$\psi(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{wenn } \varphi_x(x) \text{ definiert;} \\ \text{undefiniert,} & \text{sonst.} \end{cases}$$

ψ ist offenbar partiell rekursiv. Sei z_0 ein Index für ψ , also $\psi(x,y) = \varphi_{z_0}^{(2)}(x,y)$ für alle Paare (x,y) . Betrachte nun für festgehaltenes x die Funktion

$$\lambda y [\psi(x,y)] = \lambda y [\varphi_{z_0}(x,y)].$$

Nach dem s-m-n-Theorem (vgl. §1.1) gibt es eine rekursive Funktion s von zwei Variablen derart, daß $\lambda y [\psi(x,y)] = \varphi_{s(z_0,x)}$. Da z_0 fest, können wir s als Funktion einer Variablen auffassen. Mit $h(x) := s(z_0,x)$ für alle x gilt dann, daß h rekursiv, und $\lambda y [\psi(x,y)] = \varphi_{h(x)}$. D.h. für alle y gilt

$$\varphi_{h(x)} \neq \begin{cases} 0, & \text{wenn } \varphi_x(x) \text{ definiert;} \\ \text{undefiniert,} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Damit erhalten wir als erste der gesuchten Äquivalenzen:

$$\varphi_{h(x)} \text{ konstant} \iff \varphi_x(x) \text{ definiert; andernfalls, d.h. für } \varphi_x(x) \text{ undefiniert, ist } \varphi_{h(x)} \text{ leer.}$$

Da h rekursiv, können wir den Wert $h(x)$ für alle x berechnen, und folglich, da die Indizes der konstanten Funktionen nach Voraussetzung entscheidbar sind, die linke Bedingung der Äquivalenz entscheiden. (Wir brauchen dazu nur den Wert der Funktion f_3 an der Stelle $h(x)$ zu berechnen. Gilt $f_3(h(x))=1$, so ist $\varphi_{h(x)}$ konstant; ist $f_3(h(x))=0$, dann nicht.) Damit ist dann aber auch die rechte Seite der Äquivalenz entscheidbar - im Widerspruch zur rekursiven Unlösbarkeit des Halteproblems.

Explizit erhalten wir in $k := f_3 \circ h = \lambda x [f_3(h(x))]$ eine rekursive charakteristische Funktion von K . Denn als Komposition rekursiver Funktionen ist k rekursiv, und für alle x gilt:

$$k(x) = f_3(h(x)) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } \varphi_{h(x)} \text{ konstant;} \\ 0, & \text{wenn } \varphi_{h(x)} \text{ nicht konstant} \end{cases} = \begin{cases} 1, & \text{wenn } \varphi_x(x) \text{ definiert;} \\ 0, & \text{wenn } \varphi_x(x) \text{ undefiniert.} \end{cases}$$

Der Widerspruch zeigt, daß $\{x \mid \varphi_x \text{ konstant}\}$ nicht rekursiv, d.h. Problem (3) rekursiv unlösbar ist. Q.e.d.

Wir fassen uns, nachdem wir den Beweis unter (3) in aller Ausführlichkeit dargestellt haben, bei den Beweisen in den folgenden Fällen - worin wir ohne hin auf den vorigen zurückgreifen - etwas kürzer. Insbesondere verwenden wir hinfort das s-m-n-Theorem ohne den ausdrücklichen Rückgriff auf die ursprüngliche Funktion s.

Zu (4): Angenommen, $\{(x,y) \mid y \in \text{range } \varphi_x\}$ ist rekursiv. Sei f_4 ihre charakteristische Funktion, d.h. für alle (x,y)

$$f_4(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } y \in \text{range } \varphi_x; \\ 0, & \text{wenn } y \notin \text{range } \varphi_x. \end{cases}$$

Sei h die rekursive Funktion aus dem Beweis von (3). Dann ist mit f_4 und h auch die Funktion k mit $k(x) = f_4(h(x), 0)$ (für alle x) rekursiv, wobei gilt:

$$k(x) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } 0 \in \text{range } \varphi_{h(x)}; \\ 0, & \text{wenn } 0 \notin \text{range } \varphi_{h(x)}. \end{cases} \quad \text{Da } \varphi_{h(x)} \text{ genau dann die konstante Funktion } \equiv 0$$

ist, wenn $\varphi_x(x)$ definiert, und $0 \in \text{range } \varphi_{h(x)}$ genau dann, wenn $\varphi_{h(x)}$ die konstante Funktion $\equiv 0$ ist, gilt $0 \in \text{range } \varphi_{h(x)}$ genau dann, wenn $\varphi_x(x)$ definiert ist, und k wäre eine rekursive charakteristische Funktion der Menge K .

Zu (5): Angenommen, $\{(x,y,z) \mid \varphi_x(y)=z\}$ ist rekursiv. Sei für alle $(x,y,z) \in \mathbb{N}^3$

$$f_5(x,y,z) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } \varphi_x(y)=z; \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Sei h wie bisher. Dann ist mit f_5 auch k mit $k(x) = f_5(h(x), 0, 0)$ rekursiv, und es gilt für alle x

$$k(x) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } \varphi_{h(x)}(0)=0; \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Da $\varphi_{h(x)}(0)=0 \iff \varphi_{h(x)}$ ist konstant ($\equiv 0$) $\iff \varphi_x(x)$ definiert, ist k wieder die rekursive charakteristische Funktion von K .

Zu (6): Angenommen, $\{(x,y) \mid \varphi_x = \varphi_y\}$ ist rekursiv, und für alle Paare (x,y)

$$f_6(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } \varphi_x = \varphi_y; \\ 0, & \text{andernfalls.} \end{cases}$$

Sei y_0 ein Index der - selbstverständlich rekursiven - konstanten Funktion $\equiv 0$, d.h. $\varphi_{y_0}(x)=0$ für alle x ; h wie bisher. Dann ist auch k mit $k(x) = f_6(h(x), y_0)$ rekursiv,

$$k(x) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } \varphi_{h(x)} = \varphi_{y_0}; \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Da $\varphi_{h(x)} = \varphi_{y_0} \iff \varphi_{h(x)}$ konstant ($\equiv 0$) $\iff \varphi_x(x)$ definiert, ist k wie oben.

Zu (7): Angenommen, $\{x \mid \text{range } \varphi_x \text{ unendlich}\}$ ist rekursiv mit

$$f_7(x) = \begin{cases} 1, & \text{wenn range } \varphi_x \text{ unendlich;} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Definiere ähnlich wie unter (3) eine partielle Funktion ψ von zwei Varia-

blen durch das folgende Verfahren: Wende zu gegebenem Paar (x, y) die Vorschriftmenge P_x auf x als Input an. Wenn die Berechnung abbricht, und nur dann, gib y als Output; sonst sei ψ undefiniert. Das heißt für alle (x, y)

$$\psi(x, y) = \begin{cases} y, & \text{wenn } \mathcal{G}_x(x) \text{ definiert;} \\ \text{undefiniert,} & \text{wenn } \mathcal{G}_x(x) \text{ undefiniert.} \end{cases}$$

Da ψ offenbar partiell rekursiv, liefert das s-m-n-Theorem eine rekursive Funktion h' derart, daß

$$\mathcal{G}_{h'(x)}(y) = \begin{cases} y, & \text{wenn } \mathcal{G}_x(x) \text{ definiert;} \\ \text{undefiniert,} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Damit ist $\mathcal{G}_{h'(x)}$ genau dann die identische Funktion auf $\mathbb{N}$, wenn $\mathcal{G}_x(x)$ definiert ist; andernfalls die leere Funktion. Insbesondere gilt also: $\text{range } \mathcal{G}_{h'(x)}$

unendlich $\iff \mathcal{G}_x(x)$ definiert. Somit wäre mit der linken Seite der Äquivalenz uns andere Mal das Halteproblem entscheidbar. Wieder erhalten wir in k , $k(x) := f_7(h'(x))$ für alle x , eine rekursive charakteristische Funktion von K ; denn:

$$k(x) = f_7(h'(x)) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } \text{range } \mathcal{G}_{h'(x)} \text{ unendlich;} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} = \begin{cases} 1, & \text{wenn } \mathcal{G}_x(x) \text{ definiert;} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zu (8): Sei y_0 gegeben.

Angenommen, $\{x \mid y_0 \in \text{range } \mathcal{G}_x\}$ ist rekursiv. Für alle x gelte

$$f_8(x) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } y_0 \in \text{range } \mathcal{G}_x; \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Sei h' die rekursive Funktion aus dem Beweis zu (7). Dann folgt wegen $y_0 \in \text{range } \mathcal{G}_{h'(x)} \iff \mathcal{G}_x(x)$ definiert für die rekursive Funktion k , $k(x) := f_8(h'(x))$ für alle x , daß

$$k(x) = f_8(h'(x)) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } y_0 \in \text{range } \mathcal{G}_{h'(x)}; \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} = \begin{cases} 1, & \text{wenn } \mathcal{G}_x(x) \text{ definiert;} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Damit ist schließlich K auch auf $\{x \mid y_0 \in \text{range } \mathcal{G}_x\}$ reduziert, und der Beweis von Satz 1 vollständig.

Analog zeigt man die rekursive Unlösbarkeit der den folgenden - nicht-rekursiven (1) - Mengen entsprechenden Probleme:

(9) $\{x \mid \text{domain } \mathcal{G}_x \text{ unendlich}\}$

(10) $\{x \mid \text{domain } \mathcal{G}_x = \emptyset\}$

(11) $\{(x, y) \mid \text{domain } \mathcal{G}_x = \text{domain } \mathcal{G}_y\}$

(12) $\{x \mid \text{domain } \mathcal{G}_x = \text{domain } \mathcal{G}_{z_0}\}$ für jedes z_0

(13) $\{x \mid \mathcal{G}_x = \mathcal{G}_{z_0}\}$ für jedes z_0

(14) $\{x \mid \text{range } \mathcal{G}_x = \emptyset\}$

(15) $\{(x, y) \mid \text{range } \mathcal{G}_x = \text{range } \mathcal{G}_y\}$

(16) $\{x \mid \text{range } \mathcal{G}_x = \text{range } \mathcal{G}_{z_0}\}$ für jedes z_0

(Dabei bezeichne "domain $\mathcal{G}_x$ " den Argumentbereich von $\mathcal{G}_x$.)

Anders dagegen verhält es sich mit dem Problem

(17) ist entscheidbar, ob - bei festem x_0 - für beliebiges y $y \in \text{range } \varphi_{x_0}$?

Satz 2: Problem (17) ist je nach Wahl von x_0 lösbar oder nicht.

Beweis: Wir geben zunächst ein x_0 an, für das (17) rekursiv lösbar ist. Sei nämlich x_0 ein Index der Identitätsfunktion, d.h. es gelte $\varphi_{x_0}(y) = y$ für alle y . Dann ist $\text{range } \varphi_{x_0} = \mathbb{N}$ mit der - trivialerweise rekursiven - charakteristischen Funktion $\lambda x[1]$. -

Bleibt zu zeigen, daß es ein x_0 gibt derart, daß $\text{range } \varphi_{x_0}$ keine rekursive charakteristische Funktion hat. Definiere dazu eine partiell rekursive Funktion ψ durch

$$\psi(x) = \begin{cases} x, & \text{wenn } \varphi_x(x) \text{ definiert;} \\ \text{undefiniert,} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Sei nun x_0 ein Index für ψ , d.h. $\psi = \varphi_{x_0}$. Angenommen, $\text{range } \varphi_{x_0}$ hat die rekursive charakteristische Funktion k , d.h. für alle x

$$k(x) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } x \in \text{range } \varphi_{x_0}; \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann folgt wegen $x \in \text{range } \varphi_{x_0} \iff \varphi_{x_0}(x) \text{ definiert:}$

$$k(x) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } \varphi_x(x) \text{ definiert;} \\ 0, & \text{wenn } \varphi_x(x) \text{ undefiniert.} \end{cases}$$

Also $\text{range } \varphi_{x_0}$ nicht rekursiv. Q.e.d.

Betrachten wir in Problem (17) auch x_0 als variabel, stellt sich das folgende Problem.

(18) Gibt es ein effektives Verfahren, für beliebiges x zu entscheiden, ob (17) lösbar ist oder nicht?

Probleme, welche wie (18) in der Frage bestehen, ob ein bestimmtes anderes Problem lösbar ist, bezeichnen wir als **Meta-Probleme**. Während (18) rekursiv lösbar, so könnten wir für beliebiges x effektiv entscheiden, ob $\text{range } \varphi_x$ rekursiv ist.

Daß dies nicht möglich ist, zeigt

Satz 3: Das Metaproblem (18) ist rekursiv unlösbar.

Beweis: durch Reduktion des Halteproblems auf (18).

Sei f_{18} die charakteristische Funktion von $\{x \mid \text{range } \varphi_x \text{ rekursiv}\}$, also

$$f_{18}(x) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } \text{range } \varphi_x \text{ rekursiv;} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Definiere eine zweistellige partielle Funktion ψ durch

$$\psi(x, y) = \begin{cases} y, & \text{wenn } \varphi_x(x) \text{ und } \varphi_y(y) \text{ definiert;} \\ \text{undefiniert,} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Da ψ offenbar ^t partiell rekursiv, existiert nach dem s-m-n-Theorem ein rekursives h mit

$$\varphi_{h(x)}(y) = \begin{cases} y, & \text{wenn } \varphi_x(x) \text{ und } \varphi_y(y) \text{ definiert;} \\ \text{undefiniert,} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Damit gilt: $\text{range } \varphi_{h(x)} = \begin{cases} \{y \mid \varphi_y(y) \text{ definiert}\}, & \text{wenn } \varphi_x(x) \text{ definiert;} \\ \emptyset, & \text{wenn } \varphi_x(x) \text{ undefiniert.} \end{cases}$

Da $\{y \mid \varphi_y(y) \text{ definiert}\} = K$ nicht rekursiv, folgt daraus:

$$\text{range } \varphi_{h(x)} \text{ rekursiv} \Leftrightarrow \varphi_x(x) \text{ undefiniert.}$$

Wäre nun die Menge $\{x \mid \text{range } \varphi_x \text{ rekursiv}\}$ rekursiv, so wäre mit der linken Seite dieser Äquivalenz auch ihre rechte entscheidbar. Wenn aber " $\varphi_x(x)$ undefiniert" entscheidbar, dann auch das komplementäre " $\varphi_x(x)$ definiert" - im Widerspruch zur Unlösbarkeit des Halteproblems. - Formaler ausgedrückt, ist mit f_{18} auch die durch $k' = f_{18} \circ h$ definierte Funktion k' rekursiv, und folglich auch die durch $k(x) = 1$, wenn $k'(x) = 0$, und $k(x) = 0$, wenn $k'(x) = 1$, für alle x definierte Funktion k . Für diese aber gilt:

$$k(x) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } k'(x) = 0; \\ 0, & \text{wenn } k'(x) = 1 \end{cases} = \begin{cases} 1, & \text{wenn } \text{range } \varphi_{h(x)} \text{ nicht rekursiv;} \\ 0, & \text{wenn } \text{range } \varphi_{h(x)} \text{ rekursiv} \end{cases} = \begin{cases} 1, & \text{wenn } x \in K; \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Also $\{x \mid \text{range } \varphi_x \text{ rekursiv}\}$ nicht rekursiv.

Q.e.d.

Schließlich betrachten wir noch das Problem

(19) Ist entscheidbar, ob - für beliebiges x - die partiell rekursive Funktion φ_x zu einer rekursiven Funktion erweitert werden kann?

Entscheidend ist hierbei die rekursive Erweiterung von φ_x . Natürlich ist jedes φ_x durch die Definition $f(y) = \varphi_x(y)$, wenn $\varphi_x(y)$ definiert, und etwa $f(y) = 0$, wenn $\varphi_x(y)$ undefiniert, trivialerweise zu einer totalen Funktion f zu erweitern, - doch braucht diese im allgemeinen nicht berechenbar zu sein. Daß man i.a. nicht entscheiden kann, welches φ_x rekursiv erweitert werden kann, ist gleichbedeutend mit der rekursiven Unlösbarkeit von (19). Um dies zu zeigen, beweisen wir vorweg die Existenz einer partiell rekursiven Funktion, welche diese Eigenschaft tatsächlich nicht hat.

Satz 4: Es gibt eine partiell rekursive Funktion ψ derart, daß keine rekursive Funktion f eine Erweiterung von ψ ist, d.h. daß für alle x gilt:

$$\psi(x) \text{ definiert} \Rightarrow \psi(x) = f(x).$$

Beweis: mithilfe eines Diagonalarguments.

Definiere durch folgende Vorschrift die - offenbar partiell rekursive - Funktion ψ : Wende für beliebiges x die Vorschriftenmenge P_x auf x an. Wenn $\varphi_x(x)$ definiert, setze $\psi(x) = \varphi_x(x) + 1$; sonst ψ undefiniert.

Sei dann f eine beliebige rekursive Funktion mit dem Index y , also $f = \varphi_y$. Da f total ist, ist insbesondere $f(y)$ definiert, und da $f(y) = \varphi_y(y)$, auch $\psi(y)$, wobei $\psi(y) = \varphi_y(y) + 1$. Folglich $f(y) \neq \psi(y)$, und f ist keine Erweiterung von ψ .

Satz 4 wird auch das Erweiterungstheorem genannt. Mit seiner Hilfe beweisen wir nun

Satz 5: Das Problem (19) ist rekursiv unlösbar.

Beweis: durch Reduktion des Halteproblems.

Angenommen, $\{x \mid \varphi_x \text{ ist zu einer rekursiven Funktion erweiterbar}\}$ ist rekursiv,

$$f_{19}(x) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } \varphi_x \text{ zu einer rekursiven Funktion erweiterbar;} \\ 0, & \text{andernfalls.} \end{cases}$$

Sei ψ die partiell rekursive Funktion aus dem Beweis von Satz 4, die nicht zu einer rekursiven erweiterbar ist. Insbesondere gilt $\psi \notin \mathcal{R}$, da $\text{domain } \psi = K \neq \emptyset$ (sonst K rekursiv, im Widerspruch zur Unlösbarkeit des Halteproblems).

Definiere nun eine weitere partiell rekursive Funktion ψ' durch

$$\psi'(x, y) = \begin{cases} \psi(y), & \text{wenn } \psi(y) \text{ und } \varphi_x(x) \text{ definiert;} \\ \text{undefiniert,} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Sei h die - nach dem s-m-n-Theorem existierende - rekursive Funktion mit $\varphi_{h(x)}(y) = \psi'(x, y)$ für alle x, y . Dann gilt: $\varphi_{h(x)} = \psi \iff \varphi_x(x)$ definiert; und folglich für die durch $k' := f_{19} \circ h$ definierte rekursive Funktion k' :

$$k'(x) = f_{19}(h(x)) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } \varphi_{h(x)} \text{ zu einer rekursiven Funktion erweiterbar;} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 1, & \text{wenn } \varphi_x(x) \text{ undefiniert;} \\ 0, & \text{wenn } \varphi_x(x) \text{ definiert.} \end{cases} \quad \text{Letztere Gleichheit, da } \varphi_x(x) \text{ undefiniert} \iff$$

$\varphi_{h(x)} = \emptyset$, und die leere Funktion trivialerweise zu einer rekursiven erweiterbar ist (etwa zu jeder konstanten Funktion).

Also ist k , definiert durch $k(x) := 1$, wenn $k'(x) = 0$, sowie $k(x) := 0$, wenn $k'(x) = 1$, eine rekursive charakteristische Funktion von K .

Es folgt, daß $\{x \mid \varphi_x \text{ ist zu einer rekursiven Funktion erweiterbar}\}$ nicht rekursiv ist.

Aus Gründen der Veranschaulichung des intuitiven Reduzierbarkeitsbegriffs bewiesen wir rekursive Unlösbarkeit bislang meist durch Reduktionen des Halteproblems - mit Ausnahme der Fälle, in welchen ein Diagonalargument unmittelbar zum Ziel führte. Doch ergeben sich alle diese Ergebnisse als Spezialfälle des folgenden von H.G.Rice stammenden Satzes, der besagt, daß wir Probleme, welche die Indizierung partiell rekursiver Funktionen betreffen, nur im trivialen Fall entscheiden können. Sein Beweis ist ein vorerst letztes Beispiel der Reduktion des Halteproblems.

Satz 6: Sei $\mathcal{C}$ eine Menge von partiell rekursiven Funktionen einer Variablen.

Dann hat die Menge $\{x \mid \varphi_x \in \mathcal{C}\}$ dann und nur dann eine rekursive charakteristische Funktion, wenn $\mathcal{C}$ entweder l e e r ist, oder a l l e partiell rekursiven Funktionen enthält.

Beweis:

" $\Leftarrow$ ": Gelte $\mathcal{C} = \emptyset$ oder $\mathcal{C} = \{\varphi_x \mid x \in \mathbb{N}\}$. Dann ist $\{x \mid \varphi_x \in \mathcal{C}\} = \emptyset$ oder $= \mathbb{N}$, und folglich rekursiv.

" $\Rightarrow$ ": Wir zeigen wieder, daß sich andernfalls aus der rekursiven charakteristischen Funktion von $\{x \mid \varphi_x \in \mathcal{C}\}$ eine rekursive charakteristische Funktion von K konstruieren läßt.

Angenommen, $\mathcal{C} \neq \emptyset$ und $\mathcal{C} \neq \{\varphi_x \mid x \in \mathbb{N}\}$. Dann ist mit der Menge $I := \{x \mid \varphi_x \in \mathcal{C}\}$ auch die Menge $\bar{I} = \{x \mid \varphi_x \notin \mathcal{C}\}$ rekursiv, und da entsprechend unserer Charakterisierung alle natürlichen Zahlen als Indizes partiell rekursiver Funktionen erfaßt werden, bilden I und $\bar{I}$ eine Zerlegung (d.h. eine disjunkte Vereinigung) von $\mathbb{N}$. Insbesondere ist entscheidbar, welche der beiden Mengen einen Index x_1 der leeren Funktion $\emptyset$ enthält. Gelte ohne Beschränkung der Allgemeinheit (i.f. abgekürzt mit "o.B.d.A.") $x_1 \in I$. Ferner ist ein Index $x_2 \in \bar{I}$ effektiv auffindbar, also $\varphi_{x_2} \notin \mathcal{C}$. Definiere nun eine zweistellige Funktion ψ durch

$$\psi(x, y) := \begin{cases} \varphi_{x_2}(y), & \text{wenn } \varphi_x(x) \text{ definiert und } \varphi_{x_2}(y) \text{ definiert;} \\ \text{undefiniert,} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann ist ψ offenbar partiell rekursiv, und es gibt (nach dem s-m-n-Theorem, das wir hinfort meist stillschweigend benutzen) ein rekursives h mit $\varphi_{h(x)} = \psi(x, y)$ für alle x, y . Also folgt: für die Funktion $\varphi_{h(x)}$:

$$\varphi_{h(x)} = \varphi_{x_2}, \text{ wenn } \varphi_x(x) \text{ definiert; und } \varphi_{h(x)} = \emptyset, \text{ sonst.}$$

Daraus folgt: $\varphi_x(x)$ definiert $\Leftrightarrow \varphi_{h(x)} = \varphi_{x_2}$. Da $\emptyset = \varphi_{x_1}$ mit $x_1 \in I$, gilt letztere Bedingung genau dann, wenn $h(x) \in \bar{I}$. Für $k := c_{\bar{I}} \circ h$ gilt somit:

$$k(x) = c_{\bar{I}}(h(x)) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } h(x) \in \bar{I}; \\ 0, & \text{wenn } h(x) \in I \end{cases} = \begin{cases} 1, & \text{wenn } \varphi_{h(x)} = \varphi_{x_2}; \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} = \begin{cases} 1, & \text{wenn } \varphi_x(x) \text{ def.} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Also ist k eine rekursive charakteristische Funktion von K . Q.e.d.

§1.3 Beispiele von Reduktionen auf das Halteproblem

Bei allen bisherigen Beispielen intuitiver Reduktionen haben wir das Halteproblem (aus dem Korollar in §1.1) auf die jeweils zur Diskussion stehenden Probleme reduziert. Daraus konnten wir dann, da das Halteproblem bereits als rekursiv unlösbar bekannt war, die rekursive Unlösbarkeit auch dieser Probleme schließen. Wir benutzten also die Reduktionsmethode als Verfahren, Unentscheidbarkeitsresultate zu erzielen. Wir verlassen nun diese - durch den Satz von Rice ohnehin weitgehend erübrigte - Art ihrer Anwendung, um uns ihren mehr - in der Einleitung so genannten - "intensionalen" Aspekten zuzuwenden. Da die Entscheidbarkeit der zuletzt behandelten Probleme auch, wie wir zur Genüge demonstrierten, die des Halteproblems zur Folge hätte, sind sie - gemäß

unserer intuitiven Argumentation in der Einleitung - sozusagen "mindestens so unlösbar" wie das Halteproblem. So drängt sich die Frage auf, ob sie tatsächlich "echt unlösbarer" sind als dieses, oder auch das Umgekehrte gilt: daß, mit anderen Worten, das Halteproblem seinerseits mindestens so unlösbar ist wie sie. Die folgenden Sätze zeigen dies für die Probleme (4), (5) und (8) - diesmal jedoch für das Halteproblem der Form (1) aus §1.1, Satz 1. Wir zeigen, daß wir ausgehend von einer Lösung der Frage, ob für beliebige x und y der Wert $\varphi_x(y)$ definiert ist, auch (4), (5) und (8) lösen können; das heißt, wir reduzieren (4), (5) und (8) jeweils auf das Halteproblem (1). Daraus ergibt sich, daß - im bislang noch informellen Sinn des Begriffs - (1), (4), (5) und (8) in demselben Unlösbarkeitsgrad liegen. Da alle diese Probleme bereits als unlösbar bekannt sind, handelt es sich dabei, wie gesagt, um kein neues Unentscheidbarkeitsresultat, sondern eines über die Beziehung zwischen unlösbaren Problemen selbst: sie sind eines in eben dem Grad unlösbar wie das andere, und alle von "höherem" Grad als die rekursiven Mengen. Bei unserer intuitiven Vorstellung der Reduzierbarkeitsordnung: ihr Grad liegt "über" dem der rekursiven Mengen.

Satz 1: Problem (4) ist reduzierbar auf das Halteproblem der Form (1).

Beweis: Angenommen, das Halteproblem (1) ist lösbar; d.h. die Menge

$\{(x,y) \mid \varphi_x(y) \text{ ist definiert}\}$ besitzt eine rekursive charakteristische

$$\text{Funktion } g, \quad g(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } \varphi_x(y) \text{ definiert;} \\ 0, & \text{wenn } \varphi_x(y) \text{ undefiniert.} \end{cases}$$

Sei f_4 die charakteristische Funktion der dem Problem (4) korrespondierenden Menge, also

$$f_4(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } y \in \text{range } \varphi_x; \\ 0, & \text{wenn } y \notin \text{range } \varphi_x. \end{cases}$$

Definiere eine partielle Funktion ψ von zwei Variablen durch

$$\psi(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } y \in \text{range } \varphi_x; \\ \text{undefiniert,} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann ist ψ partiell rekursiv, wie man anhand des folgenden stufenweisen Verfahrens erkennt:

1. Stufe: Wende P_x auf 0 als Input an und rechne einen Schritt.
2. Stufe: Wende P_x auf 0 und 1 als Inputs an und rechne jeweils zwei Schritte.
- ...
- n -te Stufe: Wende P_x auf $0, 1, \dots, n-1$ an und rechne jeweils n Schritte.
- ...

Wenn $\psi(x,y)$ definiert, d.h. $y \in \text{range } \varphi_x$ ist, dann erscheint y auf einer bestimmten Stufe als Output von P_x in Anwendung auf ein gewisses z , und es gilt $\psi(x,y)=1$; ansonsten $\psi(x,y)$ undefiniert. Dieses Verfahren benutze für alle Paare (x,y) aus $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Sei x_0 ein Index für ψ , also $\psi = \varphi_{x_0}$.

Sei h eine rekursive Funktion derart, daß $\mathcal{P}_{h(x)}(y) = \psi(x, y)$ für alle x, y .

Dann gilt: $y \in \text{range } \mathcal{P}_x \iff \mathcal{P}_{h(x)}(y)$ definiert; und folglich für f_4 :

$$f_4(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } \mathcal{P}_{h(x)}(y) \text{ definiert;} \\ 0, & \text{wenn } \mathcal{P}_{h(x)}(y) \text{ undefiniert} \end{cases} = g(h(x), y). \quad \text{Aus dieser Darstellung}$$

der Funktion f_4 erhält - aufgrund der Voraussetzungen über g und h - ihre Rekursivität. Dies aber ist gleichbedeutend mit der Entscheidbarkeit von (4).

Satz 2: Problem (5) ist reduzierbar auf das Halteproblem (1).

Beweis: Sei g die rekursive Funktion aus dem Beweis von Satz 1. Dann gilt für die charakteristische Funktion f_5 der dem Problem (5) entsprechenden Menge:

$$f_5(x, y, z) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } \mathcal{P}_x(y) = z; \\ 0, & \text{wenn } \mathcal{P}_x(y) \neq z \end{cases} = \begin{cases} 1, & \text{wenn } \mathcal{P}_x(y) \text{ definiert und } \mathcal{P}_x(y) = z; \\ 0, & \text{wenn } \mathcal{P}_x(y) \text{ def. u. } \neq z, \text{ oder } \mathcal{P}_x(y) \text{ undef.} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1, & \text{wenn } g(x, y) = 1 \text{ und } \mathcal{P}_x(y) = z; \\ 0, & \text{wenn } g(x, y) = 1 \text{ und } \mathcal{P}_x(y) \neq z, \text{ oder } g(x, y) = 0 \end{cases}$$

(letztere Gleichheit nach Definition von g). Da g rekursiv, geht aus dieser Darstellung der Funktion f_5 ihre Rekursivität hervor. Also (5) entscheidbar.

Satz 3: (8) ist reduzierbar auf (1).

Beweis: Sei y_0 fest gegeben, und f_8 die charakteristische Funktion der das Problem (8) kodierenden Menge, nämlich

$$f_8(x) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } y_0 \in \text{range } \mathcal{P}_x; \\ 0, & \text{wenn } y_0 \notin \text{range } \mathcal{P}_x. \end{cases}$$

Seien die Funktionen ψ und h wie im Beweis von Satz 1. Insbesondere gilt dann: $y_0 \in \text{range } \mathcal{P}_x \iff \mathcal{P}_{h(x)}(y_0)$ definiert; folglich für f_8 :

$$f_8(x) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } \mathcal{P}_{h(x)}(y_0) \text{ definiert;} \\ 0, & \text{wenn } \mathcal{P}_{h(x)}(y_0) \text{ undefiniert} \end{cases} = f_4(x, y_0),$$

wobei f_4 die bereits im Beweis von Satz 1 als rekursiv erwiesene Funktion ist. Da nach dieser Darstellung f_8 rekursiv, ist (8) entscheidbar.

Die Sätze 1 bis 3 könnten die Vermutung entstehen lassen, daß vielleicht jedes der Probleme aus §1.2, Satz 1, sich auf das Halteproblem (1) reduzieren lasse. Daß dies insbesondere für (3), (6) und (7) nicht der Fall ist, werden wir im nachfolgenden Kapitel für den (eingeschränkten) Begriff der m -1-Reduzierbarkeit zeigen.

§1.4 Rekursiv aufzählbare und vollständige Mengen

Die Menge K , die das Halteproblem repräsentiert und schon in unseren bisherigen Beispielen eine ausgezeichnete Rolle spielte, gehört einer Klasse von Mengen an, welche aufgrund ihres beträchtlichen Grades an Konstruktivität "rekursiv aufzählbar" genannt werden. Dieser Begriff der rekursiven Aufzählbarkeit ist neben dem der Rekursivität von grundlegender Bedeutung für unsere weitere Arbeit. Insbesondere legen wir Wert auf die Untersuchung rekursiv aufzählbarer Mengen im Rahmen der - in der Einleitung erläuterten - Reduzierbarkeitsordnungen. Nicht zuletzt beziehen sich die Anwendungen der Theorie der rekursiven Funktionen meist auf Systeme, deren wohlgeformte Formeln - vermöge ihrer ebenfalls bereits einleitend angesprochenen Gödelisierung - rekursiv aufzählbar sind; i.e. sogenannte *a x i o m a t i s i e r b a r e* Theorien. Informell gesprochen, ist eine Menge (natürlicher Zahlen!) rekursiv aufzählbar, wenn ihre Elemente sich mittels eines effektiven Verfahrens auflisten lassen, wobei mögliche Wiederholungen zugelassen sind. Denken wir - gemäß dem allgemeinen Prinzip der Präzisierung effektiver Verfahrensweisen - uns dieses Verfahren durch eine berechenbare Funktion dargestellt, so gelangen wir zur folgenden formalen Definition des intuitiven Konzepts: A heißt *r e k u r s i v a u f z ä h l b a r*, wenn entweder $A = \emptyset$ oder $A = \text{range } f$ für eine rekursive Funktion f (in Worten: wenn A entweder leer oder das Bild einer rekursiven Funktion ist). Man nennt dann f eine *A u f z ä h l u n g* von A , oder sagt, daß A von f *a u f g e z ä h l t* werde.- Wir fassen kurz die wichtigsten Beziehungen zwischen Rekursivität und rekursiver Aufzählbarkeit zusammen. Wie man unmittelbar durch Anwendung des μ -Operators erkennt, ist *j e d e r e k u r s i v e M e n g e* auch *r e k u r s i v a u f z ä h l b a r*. Dagegen ist, wie wir gleich zeigen werden, K ein Beispiel einer - wie wir bereits wissen - nicht rekursiven, aber rekursiv aufzählbaren Menge. An dem folgenden Vorgehen überzeugen wir uns intuitiv davon, daß *e i n e M e n g e g e n a u d a n n r e k u r s i v i s t*, wenn sie sowohl als auch ihr Komplement rekursiv aufzählbar ist. Erzeuge nämlich gleichzeitig Listen für A und $\bar{A}$, und laufe diese für die Suche nach einem beliebigen x zickzack-artig durch. Da jede natürliche Zahl in einer der beiden Listen vorkommt, muß x irgendwann einmal erscheinen; dann wird durch die betreffende Liste entschieden, ob $x \in A$ oder $x \in \bar{A}$. Damit ist A rekursiv (die umgekehrte Richtung ist, da mit A auch $\bar{A}$ rekursiv, trivial).- Eine Menge A heißt *r e k u r s i v a u f z ä h l b a r i n n i c h t a b s t e i g e n d e r F o l g e*, wenn A das Bild einer monotonen rekursiven Funktion (in der gewöhnlichen Bedeutung des Begriffs) ist; und analog *r e k u r s i v a u f z ä h l b a r i n a n s t e i g e n d e r F o l g e*, wenn sie Bild einer streng monoton steigenden rekursiven Funktion ist. Es gilt der Satz, daß A ge-

nau dann rekursiv aufzählbar in nichtabsteigender Folge ist, wenn A rekursiv und ungleich der leeren Menge ist; sowie daß A dann und nur dann rekursiv aufzählbar in ansteigender Folge ist, wenn A rekursiv und unendlich ist.- Ebenfalls aus einer einfachen Anwendung des μ -Operators ergibt sich, daß jede unendliche rekursiv aufzählbare Menge eine unendliche rekursive Teilmenge enthält.- Der Hauptsatz über rekursiv aufzählbare Mengen besagt, daß eine Menge genau dann rekursiv aufzählbar ist, wenn sie Definitionsbereich einer partiell rekursiven Funktion ist; in unserer Notation: A rekursiv aufzählbar $\iff \exists x [A = \text{domain } \varphi_x]$. (" $\exists$ " und " $\forall$ " stehen im folgenden für den Existenz- bzw. Allquantor der Quantorenlogik.) Der Beweis verfährt nach einer Methode, engl. "dovetailing", die sehr gebräuchlich ist und sich uns in dieser Arbeit noch häufig als nützlich erweisen wird.- Zum Hauptsatz äquivalent ist das Korollar, daß eine Menge genau dann rekursiv aufzählbar ist, wenn sie Wertebereich einer partiell rekursiven Funktion ist, wenn also $\exists x [A = \text{range } \varphi_x]$. Auch dies ist durch "dovetailing" zu zeigen.- Definieren wir - mit Rogers(1967), S. 61 - für jedes x die Menge W_x als

$$W_x = \text{domain } \varphi_x,$$

so erhalten wir per definitionem aus dem Hauptsatz, daß A genau dann rekursiv aufzählbar ist, wenn $A = W_x$ für ein $x \in \mathbb{N}$. Als "Namen" der rekursiv aufzählbaren Mengen fungieren somit die Indizes der ihnen entsprechenden partiell rekursiven Funktionen. Die Zahl x heißt dann ein rekursiv aufzählbarer Index oder eine Gödelzahl für die rekursiv aufzählbare Menge W_x . Einer Bemerkung aus §1.1 zufolge besitzt jede rekursiv aufzählbare Menge abzählbar unendlich viele rekursiv aufzählbare Indizes.

Daß die Menge K, wie behauptet, rekursiv aufzählbar ist, ergibt sich nun unmittelbar aus dem zitierten Hauptsatz. Denn für die - schon wiederholt betrachtete - partiell rekursive Funktion ψ , definiert durch

$$\psi(x) := \begin{cases} 1, & \text{wenn } \varphi_x(x) \text{ definiert;} \\ \text{undefiniert,} & \text{sonst} \end{cases}$$

gilt offenbar: $K = \text{domain } \psi$. Außerdem sind wir nun - mithilfe der Definition des rekursiv aufzählbaren Index - in der Lage, für die in §1.1 als Korollar gezeigte Tatsache, daß K nicht rekursiv, einen noch viel kürzeren Beweis zu liefern. Unter der Annahme nämlich, daß K rekursiv, wäre - einer vorangegangenen Bemerkung zufolge -, da K rekursiv aufzählbar, auch das Komplement $\bar{K}$ rekursiv aufzählbar, d.h. $\bar{K} = W_x$ für einen rekursiv aufzählbaren Index x. Dann gälte wegen $K = \{x \mid x \in W_x\}$ zum einen: $x \in K \iff x \in W_x$, zum andern aber nach der Wahl von x: $x \in W_x \iff x \in \bar{K}$; und mithin der Widerspruch: $x \in K \iff x \in \bar{K}$. Demnach kann K nicht rekursiv sein.-

Ein stärkeres Korollar als das oben zitierte besagt, daß man ausgehend

von einem ihrer rekursiv aufzählbaren Indizes effektiv vom Definitionsbereich einer partiell rekursiven Funktion zum Wertebereich einer anderen gelangen kann, so daß beide identisch sind, und umgekehrt. Formal ausgedrückt: Es gibt rekursive Funktionen f und g derart, daß für alle x gilt: $\text{range } \mathcal{G}_f(x) = \text{domain } \mathcal{G}_x$, sowie $\text{domain } \mathcal{G}_{g(x)} = \text{range } \mathcal{G}_x$. - Ein weiteres Korollar besagt, daß man im Fall nichtleerer rekursiv aufzählbarer Mengen in der Weise effektiv vom Definitions- bzw. Wertebereich einer partiell rekursiven Funktion zum Wertebereich einer anderen übergehen kann, ^{den} dies überall definiert, also rekursiv ist. Formal: Es gibt rekursive Funktionen f' und g' derart, daß für alle x : $\text{range } \mathcal{G}_{f'(x)} = \text{domain } \mathcal{G}_x$, und $\text{domain } \mathcal{G}_x \neq \emptyset \Rightarrow \mathcal{G}_{f'(x)}$ ist rekursiv; bzw. $\text{range } \mathcal{G}_{g'(x)} = \text{range } \mathcal{G}_x$, und $\text{range } \mathcal{G}_x \neq \emptyset \Rightarrow \mathcal{G}_{g'(x)}$ ist rekursiv. - Ein viertes Korollar schließlich gewährleistet, daß man vom Definitions- bzw. Wertebereich der einen partiell rekursiven Funktion effektiv zum **w i e d e r h o l u n g s f r e i** aufgelisteten Wertebereich der anderen kommt. Das heißt, es gibt rekursive Funktionen f'' und g'' derart, daß für alle x gilt: $\text{range } \mathcal{G}_{f''(x)} = \text{domain } \mathcal{G}_x$, wobei $\mathcal{G}_{f''(x)}$ injektiv ist und als Definitionsbereich einen Anfangsabschnitt von $\mathbb{N}$ (in der gewöhnlichen anschaulichen Bedeutung) besitzt; und $\text{range } \mathcal{G}_{g''(x)} = \text{range } \mathcal{G}_x$ mit injektivem und auf einem Anfangsabschnitt von $\mathbb{N}$ definierten $\mathcal{G}_{g''(x)}$. Gemeinsam mit diesen Korollaren bildet der Hauptsatz ein wirkungsvolles Instrument, die rekursive Aufzählbarkeit von Mengen zu beweisen. Als weiteres Beispiel dafür - nach dem Nachweis der rekursiven Aufzählbarkeit von K , den wir nachträglich als Satz 1 formulieren - zeigen wir als Satz 2, daß das **U r b i l d** einer rekursiv aufzählbaren Menge unter einer partiell rekursiven Funktion ebenfalls rekursiv aufzählbar ist.

Satz 1: K ist rekursiv aufzählbar.

Beweis: siehe Haupttext!

Satz 2: Ist ψ eine partiell rekursive Funktion, und A rekursiv aufzählbar, so

$$\psi^{-1}(A) := \{x \mid \psi(x) \in A\} \text{ rekursiv aufzählbar.}$$

Beweis: Sei $A = \text{domain } \mathcal{G}_x$ für ein nach dem Hauptsatz existierendes x . Dann gilt: $\psi(z) \in A \Leftrightarrow \mathcal{G}_x(\psi(z))$ definiert $\Leftrightarrow \mathcal{G}_x \circ \psi(z)$ definiert; das heißt $\psi^{-1}(A) = \text{domain}(\mathcal{G}_x \circ \psi)$, und damit ist $\psi^{-1}(A)$ nach dem Hauptsatz rekursiv aufzählbar. (Hierbei ist $\mathcal{G}_x \circ \psi$ die Komposition der partiell rekursiven Funktionen $\mathcal{G}_x$ und ψ , wie sie kanonischerweise definiert ist durch

$$\mathcal{G}_x \circ \psi(z) = \begin{cases} \mathcal{G}_x(\psi(z)), & \text{wenn } \psi(z) \text{ und } \mathcal{G}_x(\psi(z)) \text{ definiert;} \\ \text{undefiniert,} & \text{sonst} \end{cases},$$

- und als solche selbst partiell rekursiv!)

Mit der rekursiven Aufzählbarkeit der Menge K erhalten wir - bei ihrer Nichtrekursivität! - gleichzeitig in ihrem Komplement, $\bar{K}$, ein Beispiel einer Menge, welche nicht rekursiv aufzählbar sein kann. Wie das frühere Diagonal-

argument zeigt, ist auch die in §1.1, Satz 2, als nicht-rekursiv erwiesene Menge $\{x \mid \mathcal{G}_x \text{ ist eine totale Funktion}\}$ nicht rekursiv aufzählbar. Da dies auch für ihr Komplement $\{x \mid \mathcal{G}_x \text{ ist keine totale Funktion}\}$ gilt, erhalten wir in ihr das erste Beispiel einer Menge, die ebensowenig rekursiv aufzählbar ist wie ihr Komplement. Dasselbe trifft zu auf die dem Problem (9) aus §1.2 entsprechende Menge $\{x \mid W_x \text{ unendlich}\}$ (-in unserer neuen Schreibweise; vgl. S. 17). Dies ist der Inhalt der folgenden beiden Sätze.

Satz 3: Die Menge $\{x \mid \mathcal{G}_x \text{ ist total}\}$ ist nicht rekursiv aufzählbar; ebensowenig ihr Komplement.

Beweis: Wir gehen unmittelbar auf die Definition der rekursiven Aufzählbarkeit zurück. Angenommen, es gibt eine rekursive Funktion f mit $\{x \mid \mathcal{G}_x \text{ total}\} = \text{range } f$. Dann ist für jedes x die Funktion $\mathcal{G}_{f(x)}$ rekursiv. Definiere eine einstellige Funktion g durch $g(x) := \mathcal{G}_{f(x)}(x) + 1$ für alle x . Dann ist offenbar auch g rekursiv, muß also seinerseits in der von f aufgezählten Menge der totalen Funktionen vorkommen. Das heißt, es existiert ein y derart, daß $g = \mathcal{G}_{f(y)}$. Für dieses y folgt zum einen $g(y) = \mathcal{G}_{f(y)}(y)$, und - nach Definition von g - zum andern $g(y) = \mathcal{G}_{f(y)}(y) + 1$: Widerspruch. Also ist $\{x \mid \mathcal{G}_x \text{ total}\}$ nicht rekursiv aufzählbar.

Bleibt zu zeigen, daß auch $\{x \mid \mathcal{G}_x \text{ nicht total}\}$ nicht rekursiv aufzählbar ist. Dazu zeigen wir, daß andernfalls das Halteproblem lösbar wäre. Angenommen nämlich, $\{x \mid \mathcal{G}_x \text{ nicht total}\}$ rekursiv aufzählbar. Sei φ eine universelle partielle Funktion, d.h. gelte $\varphi(x, y) = \mathcal{G}_x(y)$ für alle x und y . (Die Existenz eines solchen φ beruht trivialerweise auf dem folgenden Verfahren: Ermittle für beliebiges Paar (x, y) die Vorschriftenmenge P_x und wende sie auf y als Input an. Wenn $\mathcal{G}_x(y)$ definiert, setze $\varphi(x, y)$ gleich diesem Wert. Dann gilt:

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} \mathcal{G}_x(y), & \text{wenn } \mathcal{G}_x(y) \text{ definiert;} \\ \text{undefiniert,} & \text{sonst} \end{cases},$$

und φ ist nach der Church'schen These partiell rekursiv.) Definiere nun weiter eine zweistellige partiell rekursive Funktion ψ durch $\psi(x, y) := \varphi(x, x) = \mathcal{G}_x(x)$. Sei f die nach dem s-m-n-Theorem existierende rekursive Funktion mit $\mathcal{G}_{f(x)}(y) = \mathcal{G}_x(x)$. Dann gilt: $\mathcal{G}_{f(x)}$ ist total (bzw. leer) $\iff \mathcal{G}_x(x)$ definiert (bzw. undefiniert). Da $\{x \mid \mathcal{G}_x(x) \text{ undefiniert}\} = f^{-1}(\{x \mid \mathcal{G}_x \text{ nicht total}\})$ - wegen $\mathcal{G}_x(x) \text{ undefiniert} \iff \mathcal{G}_{f(x)} \text{ leer} \iff \mathcal{G}_{f(x)} \text{ nicht total}$ - ist $\{x \mid \mathcal{G}_x(x) \text{ undefiniert}\}$ als Urbild einer (nach Annahme) rekursiv aufzählbaren Menge nach Satz 2 rekursiv aufzählbar. Da auch $\{x \mid \mathcal{G}_x(x) \text{ definiert}\} = K$ rekursiv aufzählbar (Satz 1), folgt nach einer vorangegangenen Bemerkung, daß K rekursiv ist - im Widerspruch zu dem längst bekannten Sachverhalt. Q.e.d.

Satz 4: Die Menge $\{x \mid W_x \text{ unendlich}\}$ ist nicht rekursiv aufzählbar; ihr Komplement ebensowenig.

Beweis: Angenommen, $\{x \mid W_x \text{ unendlich}\}$ rekursiv aufzählbar. Definiere für beliebiges x eine partielle Funktion ψ durch Rekursion:

$$\psi := \begin{cases} \psi(0) := g_x(0); \\ \psi(y+1) := \begin{cases} g_x(y+1), & \text{wenn } \psi(y) \text{ definiert und } g_x(y+1) \text{ definiert;} \\ \text{undefiniert,} & \text{sonst.} \end{cases} \end{cases}$$

Ist g_x total, so ist $\psi = g_x$, also auch ψ total, insbesondere $\text{domain } \psi$ unendlich. Ist ψ seinerseits für ein bestimmtes y definiert, also $\psi(y) = g_x(y)$, dann ist ψ auch für alle kleineren Zahlen definiert, also g_x desgleichen. Ist daher $\text{domain } \psi$ unendlich, so ist ψ total, und damit auch g_x . Da ψ offenbar partiell rekursiv, gibt es ein rekursives h mit $\psi = g_{h(x)}$. Aufgrund des zuvor Bemerkten gilt: $W_{h(x)} \text{ unendlich} \iff g_x \text{ total}$. Also ist $\{x \mid g_x \text{ total}\} = h^{-1}(\{x \mid W_x \text{ unendlich}\})$, und $\{x \mid g_x \text{ total}\}$ als Urbild einer - nach Annahme - rekursiv aufzählbaren Menge selbst rekursiv aufzählbar - im Widerspruch zu Satz 3.

Bleibt zu zeigen, daß $\{x \mid W_x \text{ endlich}\}$ nicht rekursiv aufzählbar ist. Wir zeigen dies, indem wir ausgehend von der Annahme des Gegenteils wieder das Halteproblem entscheiden. Sei dazu g universell (vgl. Beweis von Satz 3) und $\psi(x, y) = g(x, x) = g_x(x)$ für alle x, y . Dann gibt es ein rekursives f mit $\psi = g_{f(x)}$, d.h. $g_{f(x)}(y) = g_x(x)$ für alle y . $g_{f(x)}$ ist also total (bzw. leer) genau dann, wenn $g_x(x)$ definiert (bzw. undefiniert) ist. Also gilt $\{x \mid g_x(x) \text{ undefiniert}\} = f^{-1}(\{x \mid W_x \text{ endlich}\})$, woraus aufgrund der Annahme und Satz 2 die rekursive Aufzählbarkeit von $\{x \mid g_x(x) \text{ undefiniert}\}$ folgt. Da auch das Komplement dieser Menge, nämlich K , rekursiv aufzählbar ist, kann daraus wieder auf die Rekursivität von K geschlossen werden. Damit ist der Satz vollständig bewiesen.

Wie sich leicht erkennen läßt, hat unser Vorgehen im jeweils zweiten Teil der letzten beiden Beweise große Ähnlichkeit mit dem Verfahren der Reduktion: Wir schlossen ausgehend von einer gewissen (hypothetischen) Eigenschaft der betreffenden Mengen auf die Entscheidbarkeit des Halteproblems. Und doch handelt es sich dabei - insofern wir nicht von der Rekursivität, sondern lediglich der rekursiven Aufzählbarkeit der Mengen ausgingen - nicht um Reduzierbarkeit im eigentlichen Sinn des Begriffs. Genauer betrachtet, haben wir die Rekursivität von K nicht direkt, vielmehr mittelbar - vermöge Satz 2 - über die rekursive Aufzählbarkeit von K erschlossen. Das heißt, wir erzeugten mithilfe der (hypothetischen) rekursiven Aufzählbarkeit von $\{x \mid g_x \text{ nicht total}\}$ sowie $\{x \mid W_x \text{ endlich}\}$ eine Aufzählung von $\bar{K}$. Analog führte im ersten Teil des Beweises von Satz 4 die hypothetische re-

kursive Aufzählbarkeit von $\{x \mid W_x \text{ unendlich}\}$ zur rekursiven Aufzählbarkeit von $\{x \mid \varphi_x \text{ total}\}$. Dies sind bereits intuitive Beispiele dessen, was wir später - wie in der Einleitung (vgl. S.9) angekündigt - in Kapitel IX als "Aufzählungsreduzierbarkeit" präzisieren werden. So ist aufgrund des Vorhergehenden $\bar{K}$ "aufzählungsreduzierbar" auf $\{x \mid \varphi_x \text{ nicht total}\}$ sowohl als auch auf $\{x \mid W_x \text{ unendlich}\}$; und $\{x \mid \varphi_x \text{ total}\}$ aufzählungsreduzierbar auf $\{x \mid W_x \text{ unendlich}\}$.

Nach diesem Vorblick auf den allgemeineren Begriff kehren wir zum eigentlichen zurück, um in dessen Sinn die Stellung der soweit genauer bekannten Mengen $\{x \mid \varphi_x \text{ total}\}$ und $\{x \mid W_x \text{ unendlich}\}$ in der Reduzierbarkeitsordnung - bzgl. unseres immer noch informellen Begriffs von $\leq_{\text{red}}$ - zu vergleichen. Wie sich herausstellt, sind sie gegenseitig aufeinander reduzierbar, liegen also, mit anderen Worten, in demselben Unlösbarkeitsgrad. Da beide, wie wir ausführlich zeigten, nicht rekursiv aufzählbar sind, stellt dieses Resultat - im Unterschied zu allen bisherigen Fällen von Reduktionen von oder auf die rekursiv aufzählbare Menge K - ein noch bezeichnenderes Beispiel für den schon mehrfach apostrophierten "intensionalen" Charakter des Reduzierbarkeitsbegriffs dar. Gemäß einer unserer heuristischen Vorüberlegungen der Einleitung (vgl. S. 5) muß jeder Grad, der eine rekursive Menge enthält, zur Gänze aus solchen bestehen. Dementgegen gilt die analoge Bedingung für rekursive Aufzählbarkeit (i.e.: " $A \leq_{\text{red}} B$, und B rekursiv aufzählbar $\implies A$ rekursiv aufzählbar") nicht allgemein, sondern nur für relativ eingeschränkte Präzisierungen von $\leq_{\text{red}}$ wie $\leq_m$ und $\leq_1$ (vgl. Kapitel II, §2.1, Satz 1, sowie Kapitel III, §3.1, Satz). Als intuitiv überzeugendes Beispiel einer Menge, die auf eine rekursiv aufzählbare reduzierbar ist, ohne selbst rekursiv aufzählbar zu sein, können wir - sofern nur unserer einleitend (vgl. S. 6f.) formulierten Forderung an jede einigermaßen intuitiv adäquate Präzisierung des Reduzierbarkeitsbegriffs Genüge geleistet ist - die laut einer vorstehenden Notiz nicht rekursiv aufzählbare Menge $\bar{K}$ betrachten. - So nennen wir einen Unlösbarkeitsgrad r e k u r s i v a u f z ä h l b a r , falls er wenigstens eine rekursiv aufzählbare Menge enthält.

Da rekursiv aufzählbare Mengen definitionsgemäß einen beträchtlichen Grad an Konstruktivität aufweisen, ist es - im Einklang mit der Intuition - nichts weniger als Überraschend, wenn rekursiv aufzählbare Mengen sich auf nicht rekursiv aufzählbare reduzieren lassen. So bemerkten wir bereits in §1.2 (vgl. S. 17), daß die Nicht-rekursivität der Menge $\{x \mid \text{domain } \varphi_x \text{ unendlich}\}$ sich - analog den vorhergehenden Beispielen - durch Reduktion des Halteproblems zeigen lasse. Da $\{x \mid W_x \text{ unendlich}\}$ nach Satz 4 nicht rekursiv aufzählbar ist, haben wir darin ein Beispiel einer Reduktion einer rekursiv aufzählbaren Menge auf eine nicht rekursiv aufzählbare. Wir rekapitulieren es im übernächsten Satz in der Form, daß wir K auf das - nach Satz 4 - ebenfalls nicht rekursiv aufzählbare Komplement $\{x \mid W_x \text{ endlich}\}$ reduzieren. Damit liegt - aufgrund des zuerst Bewiesenen - $d_{\text{red}}(K)$ unter oder auf gleicher Stufe wie $d_{\text{red}}(\{x \mid W_x \text{ endlich}\})$.

Satz 5: $\{x \mid W_x \text{ unendlich}\} \equiv_{\text{red}} \{x \mid \mathcal{P}_x \text{ total}\}$.

Beweis: (i) Zu: $\{x \mid W_x \text{ unendlich}\} \leq_{\text{red}} \{x \mid \mathcal{P}_x \text{ total}\}$.

Zu zeigen ist, wie unter der Annahme der Rekursivität von $\{x \mid \mathcal{P}_x \text{ total}\}$ für beliebiges x entscheidbar wird, ob W_x unendlich ist oder nicht.

Betrachte also W_x für beliebiges x . Benütze die rekursive Funktion f'' aus dem vierten der zuvor zitierten Korollare, um eine Zahl $x_1 := f''(x)$ zu bestimmen, für die $\text{range } \mathcal{P}_{x_1} = \text{domain } \mathcal{P}_x$ (wobei $\mathcal{P}_{x_1}$ injektiv und auf einem Anfangsabschnitt von $\mathbb{N}$ definiert ist). Da $\mathcal{P}_{x_1}$ die Elemente von W_x wiederholungsfrei listet, ist W_x genau dann unendlich, wenn der Anfangsabschnitt von $\mathbb{N}$ als Definitionsbereich von $\mathcal{P}_{x_1}$ unendlich ist (sich also auf ganz $\mathbb{N}$ erstreckt), d.h. wenn $\mathcal{P}_{x_1}$ eine totale Funktion ist. Da dies nun nach Voraussetzung entscheidbar ist, ist auch $\{x \mid W_x \text{ unendlich}\}$ entscheidbar. - Da die charakteristische Funktion $=: f_2$ von $\{x \mid \mathcal{P}_x \text{ total}\}$ nach Voraussetzung, die Funktion f'' nach Konstruktion rekursiv ist, läßt die charakteristische Funktion $=: f_9$ von $\{x \mid W_x \text{ unendlich}\}$ sich durch die Darstellung $f_9 = f_2 \circ f''$ explizit als rekursiv erweisen. Für alle x gilt nämlich: $f_9(x)=1 \iff W_x \text{ unendlich} \iff \mathcal{P}_{f''(x)} \text{ total} \iff f_2(f''(x))=1$

(ii) Zu: $\{x \mid \mathcal{P}_x \text{ total}\} \leq_{\text{red}} \{x \mid W_x \text{ unendlich}\}$.

Angenommen, wir könnten für beliebige z entscheiden, ob W_z unendlich.

Sei x beliebig. Definiere eine partielle Funktion ψ durch

$$\psi(z) := \begin{cases} 1, & \text{wenn } \mathcal{P}_x(w) \text{ für alle } w \leq z \text{ definiert;} \\ \text{undefiniert,} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann ist, wie aus dem folgenden Berechnungsschema hervorgeht, ψ partiell rekursiv: Berechne auf der

1. Stufe	$\mathcal{P}_x(0)$	einen Schritt;
2. Stufe	$\mathcal{P}_x(0)$ und $\mathcal{P}_x(1)$	je zwei Schritte;
$\vdots$		
n-ten Stufe	$\mathcal{P}_x(0), \mathcal{P}_x(1), \dots, \mathcal{P}_x(n)$	je $n+1$ Schritte;
$\vdots$		

Für jedes z derart, daß $\mathcal{P}_x(z)$ definiert, untersuche, ob auch $\mathcal{P}_x(0), \dots, \mathcal{P}_x(z-1)$ definiert. Wenn ja, liefere Output 1; wenn nicht, fahre in der Berechnung fort.

Da ψ über $\mathcal{P}_x$ definiert ist, und uniform von x abhängt, gibt es ein rekursives f mit $\psi(z) = \mathcal{P}_{f(x)}(z)$ für alle z .

Ist $\mathcal{P}_x$ total, so auch ψ , d.h. insbesondere $W_{f(x)}$ unendlich. Ist umgekehrt $W_{f(x)}$ unendlich, dann gibt es beliebig große Zahlen, für die $\mathcal{P}_{f(x)}$ definiert ist. Da dann $\mathcal{P}_x$ für alle ihre Vorgänger definiert ist, ist $\mathcal{P}_x$ total. Insgesamt: $\mathcal{P}_x \text{ total} \iff W_{f(x)} \text{ unendlich}$. Da Letzteres nach Annahme entscheidbar, ist $\{x \mid \mathcal{P}_x \text{ total}\}$ rekursiv. - Analog folgt für f_2 und f_9 aus (i) neben dem rekursiven h für alle x : $f_2(x)=1 \iff \mathcal{P}_x \text{ total} \iff W_{f(x)} \text{ unendlich} \iff f_9(f(x))=1$.

Insgesamt ist mit (i) und (ii) die Äquivalenz der Mengen bewiesen.

Satz 6: $K \leq_{\text{red}} \{x \mid W_x \text{ endlich}\}$.

Beweis: Sei x beliebig. Definiere die einstellige partielle Funktion ψ durch

$$\psi(z) := \begin{cases} 1, & \text{wenn } P_x \text{ in Anwendung auf } x \text{ nicht in weniger als } z \text{ Schritten} \\ & \text{stoppt;} \\ \text{undefiniert,} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Da für jedes z zur Berechnung von $\psi(z)$ nur eine endliche Zahl von Schritten in der Berechnung von $\varphi_x(x)$ nötig ist, ist ψ partiell rekursiv.

Angenommen, $\text{domain}\psi$ ist endlich. Dann gibt es nur endlich viele Zahlen z derart, daß P_x in Anwendung auf x nicht in weniger als z Schritten stoppt; es muß also eine Zahl z geben, so daß P_x , angewandt auf x , in weniger als z Schritten stoppt; Also ist $\varphi_x(x)$ definiert. - Sei umgekehrt $\varphi_x(x)$ definiert; d.h. es gibt ein z' derart, daß P_x in Anwendung auf x in z' Schritten stoppt. Dann gilt für jedes z mit $z > z'$, daß P_x , angewandt auf x , in weniger als z Schritten stoppt; d.h. $\psi(z)$ ist nur für die Zahlen z mit $z \leq z'$ definiert. Also ist $\text{domain}\psi$ endlich.

Sei die rekursive Funktion f nach dem s-m-n-Theorem so gewählt, daß $\psi = \varphi_{f(x)}$. Damit gilt: $\text{domain } \varphi_{f(x)} \text{ endlich} \iff \varphi_x(x) \text{ definiert}$. Da f rekursiv, ist dann nach Voraussetzung die linke Seite dieser Äquivalenz - und mithin rechts das Halteproblem - entscheidbar. Explizit erhält man mithilfe von f'_9 als der per definitionem charakteristischen Funktion von $\{x \mid W_x \text{ endlich}\}$ in $k := f'_9 \circ f$ eine (vermöge der Voraussetzung) rekursive charakteristische Funktion von K , da für alle x : $k(x)=1 \iff f'_9(f(x))=1 \iff W_{f(x)} \text{ endlich} \iff \varphi_x(x) \text{ definiert} \iff x \in K$.

Spätestens nach dieser Einführung des Begriffs der rekursiven Aufzählbarkeit ist es an der Zeit für eine weitere definitorische Präzisierung. An- daß dazu gibt die Bemerkung, daß wir als rekursiv aufzählbare Mengen - wie schon als rekursive (vgl. S. 1 der Einleitung) - per definitionem nur Teilmengen von $\mathbb{N}$ betrachteten (S. 24). Dessenungeachtet sprachen wir bereits im Zusammenhang mit der dem Halteproblem der Form (1) korrespondierenden Menge $\{(x,y) \mid \varphi_x(y) \text{ definiert}\}$ (S. 12) von Rekursivität, obwohl wir es dabei genau genommen nicht mit einer Menge von Zahlen, sondern einer von $Z a h l e n - p a a r e n$, d.h. nicht mit einer Teilmenge von $\mathbb{N}$, vielmehr von $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ zu tun hatten. Dasselbe gilt für die den Problemen (4), (6), (11), (15), sowie dem Metaproblem (18) entsprechenden Mengen, während die Problem (5) kodierende Menge sich gar als Menge von $T r i p e l n$ - d.h. als Teilmenge von $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ - darstellte. Mengen dieser Gestalt nennen wir - im Einklang mit der üblichen mengentheoretischen Sprache - $R e l a t i o n e n$. Obwohl nun der Begriff der Rekursivität für Relationen nicht eigens definiert war, lag doch auch da- für sein intuitiver Gehalt klar auf der Hand. Wir dehnten den Begriff der Rekursivität sowohl als auch den der rekursiven Aufzählbarkeit stillschweigend dadurch auf zwei- und dreistellige Relationen aus, daß wir diese als rekursiv

bzw. rekursiv aufzählbar ansahen, wenn sie eine rekursive charakteristische Funktion besaßen, bzw. - nach dem verallgemeinerten Hauptsatz über rekursiv aufzählbare Mengen - Definitionsbereich einer (diesfalls zwei- bzw. dreistelligen) partiell rekursiven Funktion waren. Nichtsdestoweniger schlagen wir - mit Rogers(1967), S. 63-67 - bei der nun folgenden Präzisierung einen anderen, wenngleich äquivalenten, Weg ein. Prinzipiell werden wir beliebige Eigenschaften von Zahlenmengen dadurch auf (beliebig-stellige) Relationen übertragen, daß wir letztere mit den sie "kodierenden Mengen" identifizieren. Dabei verstehen wir unter der **K o d i e r u n g** einer k -stelligen Relation ($k \in \mathbb{N}$ beliebig) ihr Bild unter einer rekursiven Bijektion - d.h. einer rekursiven injektiven und surjektiven Abbildung - vom k -fachen kartesischen Produkt $\mathbb{N}^k$ von $\mathbb{N}$ auf $\mathbb{N}$. Jede solche Abbildung ist, ohne Rücksicht auf ihre konkrete Gestalt, als Kodierung geeignet. Auch ist ihre Existenz nicht weiter problematisch. Wir nehmen nun an, daß wir für jedes $k \in \mathbb{N}$, $k > 0$, eine feste Kodierung $\tau^k: \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$ gewählt haben, und halten sie für den Rest der Arbeit fest. Gleichzeitig seien $\pi_1^k, \dots, \pi_k^k$ die Funktionen (einer Variablen), welche die Komponenten der Umkehrabbildung τ^{k-1} bestimmen. Somit gilt für alle Zahlen $z \in \mathbb{N}$: $\tau^k(\pi_1^k(z), \dots, \pi_k^k(z)) = z$. Für $k=2$ entfällt der hochgestellte Index, so daß $\tau(\pi_1(z), \pi_2(z)) = z$ für alle z . Als Abkürzung für $\tau(x,y)$ schreiben wir $\langle x,y \rangle$ sowie $A \times B$ für $\tau(A \times B)$. So können wir nun mithilfe der rekursiven Kodierungsfunktion τ^k von einer beliebigen k -stelligen Relation, insbesondere jeder Funktion bzw. partiellen Funktion, zu der entsprechenden kodierenden Menge natürlicher Zahlen übergehen. Dementsprechend hat eine k -stellige Relation definitionsgemäß genau dann eine gegebene Eigenschaft, wenn dies für die sie kodierende Menge zutrifft. Insbesondere heißt nach dieser Konvention die k -stellige **R e l a t i o n** **R** **r e k u r s i v** (bzw. **r e k u r s i v a u f z ä h l b a r**) gdw. $\tau^k(R)$ rekursiv (bzw. rekursiv aufzählbar) ist. Unmittelbar ergibt sich daraus der Satz, daß eine (einstellige) Funktion f genau dann rekursiv ist, wenn sie als zweistellige Relation rekursiv ist, was wiederum bereits dann gilt, wenn sie - als zweistellige Relation - rekursiv aufzählbar ist. Desgleichen ist eine (einstellige) partielle Funktion genau dann partiell rekursiv, wenn sie, aufgefaßt als zweistellige Relation, rekursiv aufzählbar ist. - Abschließend gelangen wir so - mithilfe des dergestalt präzisierten Begriffs der rekursiven Relation - zu einer weiteren Charakterisierung der rekursiven Aufzählbarkeit in Form der sogenannten **P r o j e k t i o n s t h e o r e m e** oder **E x i s t e n z q u a n t i f i z i e r u n g s s ä t z e**. Dazu kürzen wir für jede k -stellige Relation R den Ausdruck " $(x_1, \dots, x_k) \in R$ " per definitionem mit " $R(x_1, \dots, x_k)$ " ab und nennen - in Übereinstimmung mit der geometrischen Anschauung - die Menge $\{(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_k) \mid \exists x_j R(x_1, \dots, x_k)\}$ die **P r o j e k t i o n** von R **e n t l a n g** der j -ten **K o o r -**

d i n a t e . Dann besagt das Erste Projektionstheorem, daß es zu jeder rekursiv aufzählbaren Relation R eine rekursive Relation S gibt, so daß R eine Projektion von S ist. Insbesondere existiert, wenn R k-stellig und rekursiv aufzählbar ist, ein $(k+1)$ -stelliges rekursives S derart, daß $R = \{(x_1, \dots, x_k) \mid \exists x_{k+1} S(x_1, \dots, x_{k+1})\}$. - Umgekehrt gilt nach dem Zweitem Projektionstheorem, daß, wenn R rekursiv aufzählbar ist, auch jede Projektion von R rekursiv aufzählbar ist. Ist R insbesondere k-stellig und rekursiv aufzählbar, dann ist die Menge $\{(x_1, \dots, x_{k-1}) \mid \exists x_k R(x_1, \dots, x_k)\}$ rekursiv aufzählbar. Als Korollar folgt, daß R genau dann rekursiv aufzählbar ist, wenn R eine Projektion einer rekursiven Relation S ist. - Zu bemerken bleibt nun allerdings, daß, wie nützlich diese Theoreme zum Nachweis rekursiver Aufzählbarkeit auch sind, wir dennoch ihrer Anwendung meist entraten, um uns - aus Gründen anschaulicher Einsicht - rekursive Aufzählbarkeit direkt anhand praktischer Auflistungsverfahren zu vergegenwärtigen.

Als erstes Beispiel einer - entsprechend unserer neuen Präzisierung - rekursiv aufzählbaren, nicht aber rekursiven zweistelligen Relation betrachten wir von neuem eben die dem Halteproblem der Form (1) korrespondierende Menge $\{(x, y) \mid y \in W_x\}$. Dazu haben wir nach Definition zu zeigen, daß die Menge $K_0 := \tau(\{(x, y) \mid y \in W_x\}) = \{x, y \mid y \in W_x\}$ diese Eigenschaften besitzt.

Satz 71 K_0 ist rekursiv aufzählbar, aber nicht rekursiv.

Beweis: Definiere die einstellige partielle Funktion ψ durch

$$\psi(x) := \begin{cases} 1, & \text{wenn } \mathcal{G}_{\pi_1(x)}(\pi_2(x)) \text{ definiert;} \\ \text{undefiniert,} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann ist, da die Indizes $\pi_1(x)$ und $\pi_2(x)$ als die beiden Komponenten des Wertes $\tau^{-1}(x)$ berechenbar sind, ψ offenbar partiell rekursiv, und für alle x gilt: $x \in \text{domain } \psi \iff \mathcal{G}_{\pi_1(x)}(\pi_2(x)) \text{ definiert} \iff \pi_2(x) \in W_{\pi_1(x)} \iff \langle \pi_1(x), \pi_2(x) \rangle \in K_0 \iff x \in K_0$. Folglich ist $K_0 = \text{domain } \psi$, d.h. - nach dem Hauptsatz - K_0 rekursiv aufzählbar. - Bleibt zu zeigen, daß K_0 nicht rekursiv ist. Dazu zeigen wir, daß aus der Annahme der Rekursivität von K_0 die Entscheidbarkeit des Halteproblems (1) folgt. Denn um für beliebige x und y zu entscheiden, ob $\mathcal{G}_x(y)$ definiert, berechne einfach die Kodierung des Paares (x, y) , d.h. den Wert $z := \langle x, y \rangle$. Dafür gilt dann: $\mathcal{G}_x(y)$ definiert $\iff \mathcal{G}_{\pi_1(z)}(\pi_2(z))$ definiert $\iff z \in \text{domain } \psi \iff z \in K_0$, welches Letztere nach Voraussetzung entscheidbar ist. Also ist K_0 nicht rekursiv. - Ausgedrückt mittels der charakteristischen Funktion $=: k_0$ von K_0 : berechne (für beliebige x und y) die Kodierung $z = \langle x, y \rangle$; dann gilt $\mathcal{G}_x(y)$ definiert genau dann, wenn $\mathcal{G}_{\pi_1(z)}(\pi_2(z))$ definiert, d.h. $\mathcal{G}_x(y)$ definiert $\iff k_0(z) = 1$.

Wir schließen unsere vorläufigen Betrachtungen zur rekursiven Aufzählbarkeit mit der - nach wie vor intuitiven - Veranschaulichung eines Begriffs,

dem wir bei den Reduzierbarkeitsuntersuchungen rekursiv aufzählbarer Mengen einen besonderen Status einräumen werden. Seine Definition geht zurück auf E. L. Post, der die dem Halteproblem (1') korrespondierende Menge K die "vollständige Menge" ("complete set", im Original) nannte und dazu bemerkte: " 'A complete set' might be better. Just how to abstract from K the property of completeness is not, at the moment, clear" (vgl. Post (1944), a.a.O. S. 295). Später nannte man per definitionem eine Menge v o l l s t ä n d i g i n b e z u g a u f $\leq_{\text{red}}$, wenn sie rekursiv aufzählbar ist, und jede rekursiv aufzählbare Menge auf sie red-reduzierbar ist. Eine vollständige Menge ist demnach vom höchsten Grad unter den rekursiv aufzählbaren Mengen; genauer: der red-Grad einer red-vollständigen Menge ist mindestens ebenso hoch wie der red-Grad jeder anderen rekursiv aufzählbaren Menge.

Ein erstes Beispiel einer im intuitiven Sinn vollständigen Menge bildet die zuvor definierte Menge K_0 , ein zweites K selbst.

Satz 8: K_0 ist vollständig.

Beweis: K_0 ist rekursiv aufzählbar nach Satz 7.

Sei ferner A eine beliebige rekursiv aufzählbare Menge, $A = W_y$ für ein geeignetes y . Dann gilt für beliebiges x : $x \in A \iff \mathcal{G}_y(x)$ definiert $\iff \langle x, y \rangle \in K_0$. Daher ist, wenn K_0 rekursiv, auch A rekursiv. Also $A \leq_{\text{red}} K_0$. - Explizit gilt, wenn k_0 wieder die charakteristische Funktion von K_0 bezeichnet, für die charakteristische Funktion c_A von A : $c_A(x) = 1$ genau dann, wenn $k_0(\langle x, y \rangle) = 1$; d.h. mit der durch $\tau'(x) := \tau(x, y)$ für alle x definierten und offenbar rekursiven Funktion τ' , daß $c_A = k_0 \circ \tau'$, also c_A als Komposition rekursiver Funktionen rekursiv.

Satz 9: K ist vollständig.

Beweis: K rekursiv aufzählbar nach Satz 1 dieses Paragraphen.

Wir reduzieren nun K_0 auf K . Da K_0 nach dem vorausgehenden Satz vollständig ist, folgt daraus dann - vermöge der Transitivität der Reduzierbarkeitsrelation - die Vollständigkeit von K .

Definiere für beliebige x die partiell rekursive Funktion ψ durch

$$\psi(z) := \begin{cases} 1, & \text{wenn } \mathcal{G}_{\pi_1(x)}(\pi_2(x)) \text{ definiert;} \\ \text{undefiniert,} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann hängt das Verhalten von ψ nicht vom Argument z , sondern ausschließlich von x ab: ψ ist die konstante Funktion $\equiv 1$, wenn $\pi_2(x) \in W_{\pi_1(x)}$, andernfalls die leere Funktion. Sei - nach dem s-m-n-Theorem - f rekursiv mit $\psi = \mathcal{G}_f(x)$. Dann gilt: $x \in K_0 \iff \langle \pi_1(x), \pi_2(x) \rangle \in K_0 \iff \mathcal{G}_{\pi_1(x)}(\pi_2(x)) \text{ definiert} \iff \mathcal{G}_f(x) \text{ total} \iff \mathcal{G}_f(x)(f(x)) \text{ definiert} \iff f(x) \in K$. Somit ist, wenn K entscheidbar, auch K_0 entscheidbar. Für c_{K_0} gilt $c_{K_0} = c_K \circ f$; also c_{K_0} als Komposition rekursiver Funktionen rekursiv.

Korollar: $K \equiv_{\text{red}} K_0$.

Beweis: $K \leq_{\text{red}} K_0$, da K_0 vollständig, und K rekursiv aufzählbar.

$K_0 \leq_{\text{red}} K$, da K vollständig, und K_0 rekursiv aufzählbar.

Da K und K_0 von demselben Unlösbarkeitsgrad sind, sind die Halteprobleme der Form (1) und (1') äquivalent. Es ist der Grad, welcher genau die vollständigen Mengen enthält. Wo immer wir bisher Resultate über rekursive Unlösbarkeit dadurch erzielten, daß wir das Halteproblem reduzierten, können wir folgern, daß jedes auf diese Art als unlösbar erwiesene Problem einen mindestens so hohen Grad haben muß wie den höchsten Grad für rekursiv aufzählbare Mengen. Ist die dem Problem entsprechende Menge rekursiv aufzählbar, so sind die Grade identisch; andernfalls ist von vornherein nichts auszusagen.- Wir werden sehen, daß die Tatsachen über Vollständigkeit, die wir in bezug auf unseren bis hierher mehr oder weniger informellen Begriff von Reduzierbarkeit erhalten haben, bei jeder der nun folgenden Präzisierungen Gültigkeit behalten werden.-

§2.1 Motivation und Definition nach Post. Einfache Eigenschaften und Beispiele

"Mehr oder weniger informell" nannten wir abschließend unseren Reduzierbarkeitsbegriff in den Beispielen des ersten Kapitels. "Mehr", weil wir noch keine eigentliche Präzisierung vorliegen hatten; "weniger": da unsere intuitiven Schlüsse dabei doch einigermaßen präzise schienen. Denn in ausnahmslos allen Fällen der Reduktion einer Menge A auf eine Menge B gelangten wir ausgehend von der Rekursivität der charakteristischen Funktion c_B von B durch effektive Konstruktionen zur - dadurch als rekursiv erwiesenen - charakteristischen Funktion c_A von A. Explizit ergab sie sich als Komposition von c_B und einer weiteren - gewöhnlich mithilfe des s-m-n-Theorems bestimmten - rekursiven Funktion, woraus sich unmittelbar ihre Rekursivität ergab. Die Präzisierung des Reduzierbarkeitsbegriffs, welche dadurch nahegelegt ist, lautet: A reduzierbar auf B genau dann, wenn es eine rekursive Funktion f gibt derart, daß $c_A = c_B \circ f$. Wegen $x \in A \iff c_A(x)=1 \iff c_B(f(x))=1 \iff f(x) \in B$, ist dies gleichbedeutend mit der Formulierung: A reduzierbar auf B genau dann, wenn es eine rekursive Funktion f gibt derart, daß für alle Zahlen x gilt: $x \in A \iff f(x) \in B$. In der Tat formulierten wir in unseren Beispielen der Reduktion des Halteproblems immer zuerst eine Äquivalenz der Form: $\mathcal{P}_x(x) \text{ definiert } \iff P(\mathcal{P}_{f(x)})$, wobei P als wohldefinierte Eigenschaft partiell rekursiver Funktionen nach Voraussetzung entscheidbar, und f die - nach dem s-m-n-Theorem gefundene - rekursive Funktion war. Dies war wiederum gleichbedeutend mit: $x \in K \iff f(x) \in B$, mit B als der Menge, auf die das Halteproblem reduziert werden sollte. Da B nach Voraussetzung entscheidbar war, stellte so für jedes x der - berechenbare! - Funktionswert f(x) die Zahl dar, welche darüber entschied, ob $x \in K$ oder nicht. Vgl. dazu vor allem den Beweis von Satz 1, §1.2, S. 14-17.- Auch in unseren Beispielen von Reduktionen auf das Halteproblem (§1.3) waren die charakteristischen Funktionen der zu reduzierenden Probleme als Kompositionen von der - nach Annahme rekursiven - charakteristischen Funktion der dem Halteproblem (der Form (1)) korrespondierenden Menge und einer weiteren - ebenfalls über das s-m-n-Theorem gewonnenen - Funktion (h, im Fall von §1.3, Satz 1) darzustellen.- Und schließlich gingen wir auch bei den Reduktionen von K verschiedener Mengen nicht wesentlich anders vor. So galt etwa im Beweis von Satz 5, §1.4: $W_x \text{ unendlich} \iff \mathcal{P}_{f'(x)} \text{ total}$, mit f' als der rekursiven Funktion aus dem letzten der in demselben Paragraphen zum Hauptsatz über rekursiv aufzählbare Mengen zitierten Korollare. Dabei brauchten wir erst gar nicht das s-m-n-Theorem in Anspruch zu nehmen. Ebenso wenig im Beweis von Satz 8 (ibid.), wo wir schlossen: $x \in A \iff \tau'(x) \in K_0$, mit τ' als einer direkt aus der rekursiven (zweistelligen) Kodierungsfunktion τ abgeleiteten rekursiven Funktion.- Die einzelnen Zahlen hatte auch Post bei seinen

Überlegungen zur Präzisierung dieses Reduzierbarkeitsbegriffs im Auge: "Let S_1 and S_2 be any two sets of positive integers. One of the simplest ways in which the decision problem of S_1 would be reduced to the decision problem of S_2 would arise if we had an effective method which would determine for each positive integer n a positive integer m such that n is, or is not, in S_1 according as m is, or is not, in S_2 . For if we could somehow determine whether m is, or is not, in S_2 , we would determine n to be, or not be, in S_1 correspondingly. If 'effective method' be replaced by 'recursive method', we shall say, briefly, that S_1 is then *many-one reducible* to S_2 ." ("Seien S_1 und S_2 zwei beliebige Mengen positiver ganzer Zahlen. Eine der einfachsten Methoden, das Entscheidungsproblem von S_1 auf das Entscheidungsproblem von S_2 zu reduzieren, läge vor, falls wir ein effektives Verfahren hätten, das zu jeder positiven ganzen Zahl n eine positive ganze Zahl m so bestimmte, daß n in S_1 liegt oder nicht, je nachdem, ob m in S_2 liegt oder nicht. Denn wenn wir irgendwie entscheiden könnten, ob m in S_2 ist oder nicht, würden wir dementsprechend entscheiden, ob n in S_1 ist oder nicht. Ersetzen wir 'effektives Verfahren' durch 'rekursives Verfahren', so sagen wir kurz, daß S_1 *m-1-reduzierbar* auf S_2 sei." (Post(1944), a.a.O. S. 296f.)) "Rekursives Verfahren" aber könne hier, wie Post abschließend bemerkt, bedeuten, daß $m=f(n)$, wobei f eine rekursive Funktion ist. Denn dadurch, daß zu jeder Zahl n genau(1) eine Zahl m bestimmt wird, ist eine Abbildung im mathematischen Sinn definiert. Dabei nimmt die Bezeichnung "many-one reducible" Bezug darauf, daß mehrere Zahlen n auf ein- und dieselbe Zahl m abgebildet werden können, d.h. die betreffende (rekursive) Funktion - die sogenannte "Reduktionsfunktion" nicht injektiv zu sein braucht - was indes keineswegs ausgeschlossen wird. In der Tat gelangen wir, wie schon in der Einleitung erwähnt, durch eben die Forderung der Injektivität der Reduktionsfunktion zu einem eigenen, engeren Reduzierbarkeitsbegriff: dem der "1-1-Reduzierbarkeit" (von engl. "one-one reducibility"), den wir im nächsten Kapitel behandeln. Unsere jetzige Präzisierung ist also die etwas allgemeinere.

Definition: A heißt m-1-reduzierbar auf B (in Zeichen: $A \leq_m B$), wenn es eine rekursive Funktion f gibt derart, daß für alle x gilt: $x \in A \iff f(x) \in B$. - Als Abkürzung verwenden wir: A "*m-reduzierbar*" auf B . Gilt dergestalt $A = f^{-1}(B)$, so heiße A auf B *m-reduzierbar* *via* (bzw. *über* oder *vermöge*) f .

Wir vergewissern uns leicht, daß diese Definition - wie ja bereits die "informellen" Beispiele von m -Reduktionen in Kapitel I nahelegen - insofern eine gültige Präzisierung des intuitiven Reduzierbarkeitsbegriffs darstellt, als sie allen in der Einleitung als notwendig erörterten Bedingungen (gemeint sind die "unbedingt" notwendigen; vgl. S.4) genügt. So erhält nun

das erste dieser Kriterien: daß, falls ein Problem auf das andere reduzierbar ist, ein Verfahren zur Lösung des zweiten auch ein Verfahren zur Lösung des ersten liefern soll - die folgende Form: " $A \leq_m B$ & B rekursiv $\implies A$ rekursiv". Seine Erfüllung ergibt sich unmittelbar aus der Feststellung, daß die Reduktionsfunktion rekursiv ist, d.h. im Fall von $A \leq_m B$ via f für jedes x der Wert $f(x)$ effektiv zu ermitteln ist. Aufgrund der Rekursivität von B ist dann entscheidbar, ob $f(x) \in B$ - und damit $x \in A$ - oder nicht. - Direkt ist, worauf wir durchweg insistierten, die Rekursivität von c_A an ihrer Darstellung als Komposition von c_B und f abzulesen, da $A \leq_m B$ via f per definitionem äquivalent ist mit der Gleichung $c_A = c_B \circ f$.

Als Relation zwischen Mengen natürlicher Zahlen ist $\leq_m$ reflexiv und transitiv. Denn für jede beliebige Menge A gilt $A \leq_m A$ vermöge $f = \text{id}$, wobei id die (selbstredend rekursive) Identitätsfunktion auf der Menge der natürlichen Zahlen sei. Also $\leq_m$ reflexiv. - Seien weiters drei Mengen A, B, C gegeben mit $A \leq_m B$ via f und $B \leq_m C$ via g ; d.h. f und g rekursiv, und für alle x : $x \in A \iff f(x) \in B$, sowie $x \in B \iff g(x) \in C$. Dann ist auch die durch $h := g \circ f$ definierte Funktion h rekursiv, wobei für alle x folgt: $x \in A \iff f(x) \in B \iff g(f(x)) \in C \iff h(x) \in C$. Also $A \leq_m C$ via h , und $\leq_m$ transitiv. Damit sind alle unbedingt notwendigen Kriterien erfüllt.

Neben den Gleichungen $c_A = c_B \circ f$ sowie $A = f^{-1}(B)$ ist die Bedingung für m -Reduzierbarkeit $\forall x [x \in A \iff f(x) \in B]$ äquivalent mit der Konjunktion: $f(A) \subset B$ & $f(\bar{A}) \subset \bar{B}$. A ist demzufolge genau dann m -reduzierbar auf B , wenn es eine rekursive Funktion f gibt, welche A in B abbildet und $\bar{A}$ in $\bar{B}$. Wegen $f(A) = f(\bar{\bar{A}})$ ergibt sich somit aus $A \leq_m B$ unmittelbar auch $\bar{A} \leq_m \bar{B}$. $A \leq_m B$ ist also mit $\bar{A} \leq_m \bar{B}$ äquivalent. - Als ersten Satz halten wir schließlich eine Beobachtung fest, auf welche wir bereits bei der ersten Behandlung rekursiv aufzählbarer Mengen in §1.4 als Besonderheit der m - und 1 -Reduzierbarkeit verwiesen (vgl. S.29). Sie wird uns häufig als Gegenargument für m -Reduzierbarkeit nützlich sein.

Satz 1: $A \leq_m B$ & B rekursiv aufzählbar $\implies A$ rekursiv aufzählbar.

Beweis: Gelte $A \leq_m B$ via f , d.h. $A = f^{-1}(B)$. Dann ist A als Urbild einer rekursiv aufzählbaren Menge - nach §1.4, Satz 2 - ebenfalls rekursiv aufzählbar.

Nach diesen ersten elementaren Resultaten über $\leq_m$ gehen wir über zu den zugehörigen Unlösbarkeitsgraden und ihrer Reduzierbarkeitsordnung.

Definition: $A \equiv_m B : \iff A \leq_m B$ & $B \leq_m A$.

Bezeichnung: A m - ä q u i v a l e n t mit B .

Unseren Ausführungen in der Einleitung zufolge (vgl. S.4f.) ist $\equiv_m$ eine Äquivalenzrelation auf der Potenzmenge von $\mathbb{N}$. Die Äquivalenzklassen von

$\equiv_m$ heißen Grade der Unlösbarkeit in bezug auf m -Reduzierbarkeit oder einfach m -Grade. In Übereinstimmung mit den terminologischen Klärungen in der Einleitung (S.5) bezeichnen $d_m(A)$ den m -Grad der Menge A , d.h. wir definieren: $d_m(A) := \{B \mid A \equiv_m B\}$. Die durch die Festsetzung

$$d_m(A) \leq_m d_m(B) : \Leftrightarrow A \leq_m B \quad (\text{für beliebige } A, B \in \mathbb{N})$$

auf der Gesamtheit der m -Grade induzierte partielle Ordnung (vgl. S.6) heißt die m -Reduzierbarkeitsordnung. Gilt $d_m(A) \leq_m d_m(B)$ und nicht gleichzeitig auch $d_m(B) \leq_m d_m(A)$, so schreiben wir $d_m(A) <_m d_m(B)$ und sagen, daß $d_m(A)$ unter $d_m(B)$, bzw. $d_m(B)$ über $d_m(A)$ liegt, bzw. daß A von niedrigerem m -Grad ist als B , bzw. B von höherem m -Grad als A . Gilt aber weder $d_m(A) \leq_m d_m(B)$ noch $d_m(B) \leq_m d_m(A)$, dann heißen $d_m(A)$ und $d_m(B)$ unvergleichbar, in Zeichen: $d_m(A) \parallel_m d_m(B)$.

Daraus, daß, wenn $A \leq_m B$ und B rekursiv, auch - wie wir zuvor unserer Erwartung gemäß zeigen konnten - A rekursiv, folgt, daß jeder m -Grad, welcher eine rekursive Menge enthält, gänzlich aus rekursiven Mengen besteht. Satz 1 zufolge besteht auch jeder m -Grad, der eine rekursiv aufzählbare Menge enthält, ausschließlich aus rekursiv aufzählbaren Mengen. Wir sprechen dann von rekursiven Graden bzw. rekursiv aufzählbaren Graden in der m -Reduzierbarkeitsordnung. Darüberhinaus zeigt Satz 1, daß die Eigenschaft der rekursiven Aufzählbarkeit sich in der m -Reduzierbarkeitsordnung nach unten vererbt, d.h. jeder m -Grad unterhalb eines rekursiv aufzählbaren m -Grades wieder rekursiv aufzählbar ist. Denn da im Fall von $d_m(A) \leq_m d_m(B)$ (für A, B bel.) insbesondere $A \leq_m B$, ist, wenn B rekursiv aufzählbar, auch A rekursiv aufzählbar - und damit per definitionem $d_m(A)$. - Da es rekursiv aufzählbare Mengen gibt, die nicht rekursiv sind (wie etwa K), wird es unter den rekursiv aufzählbaren Graden der m -Reduzierbarkeitsordnung sowohl rekursive als auch nicht-rekursive geben. Der folgende Satz analysiert die Struktur der rekursiven Mengen unter $\leq_m$.

Satz 2: Es existieren in der m -Reduzierbarkeitsordnung drei rekursive Grade, nämlich $d_m(\emptyset)$, $d_m(\{1\})$ und $d_m(\mathbb{N})$. Während $d_m(\emptyset)$ und $d_m(\mathbb{N})$ miteinander unvergleichbar sind, liegen beide unterhalb von $d_m(\{1\})$.

Beweis: Wir zeigen zunächst, daß alle rekursiven Mengen ungleich $\emptyset$ und $\mathbb{N}$ im m -Grad von $\{1\}$ liegen. - Sei dazu A rekursiv mit $\emptyset \neq A \neq \mathbb{N}$ und $a \in A$, $a' \in \bar{A}$ gegeben. Definiere die (offenbar rekursiven) Funktionen f und g durch $f(1) := a$ und $f(x) := a'$ für alle $x \neq 1$, sowie $g(x) := 1$ für alle $x \in A$ und $g(x) := 2$ für $x \notin A$. Dann gilt $\{1\} \leq_m A$ via f und $A \leq_m \{1\}$ via g , also $\{1\} \equiv_m A$. Folglich ist $d_m(\{1\}) = \{A \mid A \text{ rekursiv} \ \& \ A \neq \emptyset \ \& \ A \neq \mathbb{N}\}$. Da $\emptyset \leq_m \{1\}$ via f mit $f(x) := 2$ für alle x , jedoch nicht $\{1\} \leq_m \emptyset$ wegen $g(1) \notin \emptyset$

für alle Funktionen g , folgt $\mathcal{O} <_m \{1\}$, und somit $d_m(\mathcal{O}) <_m d_m(\{1\})$. Da ebenso $\mathbb{N} \leq_m \{1\}$ via f mit $f(x) := 1$ für alle x , jedoch nicht $\{1\} \leq_m \mathbb{N}$ wegen $g(2) \notin \mathcal{O}$ ($=\mathbb{N}$) für alle Funktionen g , folgt $\mathbb{N} <_m \{1\}$, und damit auch $d_m(\mathbb{N}) <_m d_m(\{1\})$.

Da schließlich weder $\mathcal{O} \leq_m \mathbb{N}$ (wegen $f(x) \notin \mathcal{O}$ ($=\mathbb{N}$) für alle Funktionen f und Zahlen x) noch $\mathbb{N} \leq_m \mathcal{O}$, sind $\mathcal{O}$ und $\mathbb{N}$ unvergleichbar, und damit auch $d_m(\mathcal{O})$ und $d_m(\mathbb{N})$. D.h. $d_m(\mathcal{O}) \not\leq_m d_m(\mathbb{N})$. Q.e.d.

Die intuitiv naheliegende Forderung, daß ein lösbares Problem auf jedes andere, lösbar oder nicht, reduziert werden können sollte (vgl. Einleitung S.5), ist demnach im Fall der m -Reduzierbarkeit nicht erfüllt. Gegenbeispiele sind die rekursiven Mengen $\mathcal{O}$ und $\mathbb{N}$, die wir eben als m -unvergleichbar erwiesen haben. Doch sind dies auch, wie der folgende Satz zeigt, die einzigen Ausnahmen.

Satz 3: $A \text{ rekursiv} \ \& \ \mathcal{O} \neq B \neq \mathbb{N} \implies A <_m B$.

Beweis: Analog dem ersten Teil des Beweises von Satz 2. Sei nämlich $b \in B$ und $b' \in \bar{B}$. Definiere die Funktion f durch $f(x) := b$ für alle $x \in A$ und $f(x) := b'$ für $x \notin A$. Dann ist f rekursiv, und es gilt für alle x : $x \in A \iff f(x) \in B$. Das heißt $A \leq_m B$ via f .

Als einfaches Beispiel für die Äquivalenz der rekursiven Mengen ungleich $\mathcal{O}$ und $\mathbb{N}$ betrachten wir die Menge aller Primzahlen und die Menge aller geraden Zahlen. Via f mit $f(x) := 0$ für Primzahlen x , und $f(x) := 1$, falls x keine Primzahl, gilt $\{x \mid x \text{ Primzahl}\} \leq_m \{x \mid x \text{ gerade}\}$; und via g mit $g(x) := 2$ für x gerade, sowie $g(x) := 1$ für x ungerade, gilt $\{x \mid x \text{ gerade}\} \leq_m \{x \mid x \text{ Primzahl}\}$. Also " $\equiv_m$ ".

Dagegen bringt der folgende Satz ein Beispiel zweier nicht-rekursiver, nicht einmal rekursiv aufzählbarer Mengen, die demselben m -Grad angehören. Dieser kann also keine rekursiv aufzählbare Menge enthalten. Der Satz ist eine präzise Rekapitulation von Satz 5 aus §1.4, wo wir m -Reduzierbarkeit noch intuitiv handhabten.

Satz 4: $\{x \mid \mathcal{W}_x \text{ unendlich}\} \equiv_m \{x \mid \mathcal{G}_x \text{ total}\}$.

Beweis: (i) Zu $\{x \mid \mathcal{W}_x \text{ unendlich}\} \leq_m \{x \mid \mathcal{G}_x \text{ total}\}$.

Wähle f gleich der rekursiven Funktion f' aus dem Beweis von Satz 5, §1.4 mit $\text{range } \mathcal{G}_{f(x)} = \text{domain } \mathcal{G}_x$, $\mathcal{G}_{f(x)}$ injektiv, und $\text{domain } \mathcal{G}_{f(x)}$ als Anfangsabschnitt von $\mathbb{N}$. Dann gilt wie früher für alle x : $\mathcal{W}_x \text{ unendlich} \iff \text{range } \mathcal{G}_{f(x)} \text{ unendlich} \iff \text{domain } \mathcal{G}_{f(x)} = \mathbb{N} \iff \mathcal{G}_{f(x)} \text{ total}$.

Das heißt $\{x \mid \mathcal{W}_x \text{ unendlich}\} \leq_m \{x \mid \mathcal{G}_x \text{ total}\}$ via f .

(ii) Zu $\{x \mid \mathcal{G}_x \text{ total}\} \leq_m \{x \mid \mathcal{W}_x \text{ unendlich}\}$.

Sei x beliebig gegeben. Dann definiere die partiell rekursive Funktion ψ wie in (ii) des Beweises von Satz 5, §1.4. Sei auch die rekursive Funktion f wie dort gewählt, so daß für alle x : $\mathcal{G}_x \text{ total} \iff \mathcal{W}_{f(x)} \text{ unendlich}$.

Dann gilt $\{x \mid \mathcal{G}_x \text{ total}\} \leq_m \{x \mid \mathcal{W}_x \text{ unendlich}\}$ vermöge f .

Satz 6 aus §1.4 zeigte die Reduzierbarkeit - im informellen Sinn - von K auf die Menge $\{x \mid W_x \text{ endlich}\}$. Auch dies rekapitulieren wir nun formal als m -Reduktion. Da die Umkehrung nicht gilt, erhalten wir dadurch das Beispiel eines m -Grades über K .

Satz 5: (i) $K \leq_m \{x \mid W_x \text{ endlich}\}$;

(ii) $\{x \mid W_x \text{ endlich}\} \not\leq_m K$.

Beweis: (i) Betrachte für beliebiges x die partiell rekursive Funktion ψ aus dem Beweis von Satz 6, §1.4. Sei die rekursive Funktion f nach dem s - m -Theorem wie dort gewählt. Dann gilt für alle x : $x \in K \iff W_{f(x)} \text{ endlich}$.

Also $K \leq_m \{x \mid W_x \text{ endlich}\}$ via f .

(ii) Indirekt. Angenommen, $\{x \mid W_x \text{ endlich}\} \leq_m K$ vermöge f . Dann gilt $\{x \mid W_x \text{ endlich}\} = f^{-1}(K)$, und damit, da K rekursiv aufzählbar, nach Satz 1 $\{x \mid W_x \text{ endlich}\}$ rekursiv aufzählbar - im Widerspruch zu §1.4, Satz 4.

Also $\{x \mid W_x \text{ endlich}\} \not\leq_m K$.

Somit haben wir $d_m(K) \leq_m d_m(\{x \mid W_x \text{ endlich}\})$, sowie $d_m(K) \not\leq_m d_m(\{x \mid W_x \text{ endlich}\})$, d.h. $d_m(K) <_{\text{von } K} d_m(\{x \mid W_x \text{ endlich}\})$: der m -Grad K liegt unter dem m -Grad von $\{x \mid W_x \text{ endlich}\}$. Der nächste Satz zeigt dies auch für das Komplement von K .

Satz 6: (i) $\bar{K} \leq_m \{x \mid W_x \text{ endlich}\}$;

(ii) $\{x \mid W_x \text{ endlich}\} \not\leq_m \bar{K}$.

Beweis: (i) Für beliebig gegebenes x definiere ψ durch

$$\psi(z) := \begin{cases} 1, & \text{falls } P_x \text{ mit Input } x \text{ in weniger als } z \text{ Schritten konvergiert;} \\ \text{undefiniert,} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann ist ψ partiell rekursiv. Insbesondere gilt: $\text{domain } \psi$ endlich (dann $= \emptyset$) $\iff \mathcal{G}_x(x)$ undefiniert. Sei f rekursiv mit $\mathcal{G}_{f(x)} = \psi$ für alle x . Dann folgt: $x \in \bar{K} \iff \mathcal{G}_x(x)$ undefiniert $\iff \text{domain } \mathcal{G}_{f(x)} \text{ endlich} \iff W_{f(x)} \text{ endlich}$.

Also $\bar{K} \leq_m \{x \mid W_x \text{ endlich}\}$ vermöge f .

(ii) Indirekt. Angenommen, $\{x \mid W_x \text{ endlich}\} \leq_m \bar{K}$ via f . Dann folgt durch Komplementbildung $\{x \mid W_x \text{ unendlich}\} \leq_m K$ via f , und $\{x \mid W_x \text{ unendlich}\}$ ist als Urbild von K unter f rekursiv aufzählbar - im Widerspruch zu §4.1, Satz 4. Folglich $\{x \mid W_x \text{ endlich}\} \not\leq_m \bar{K}$.

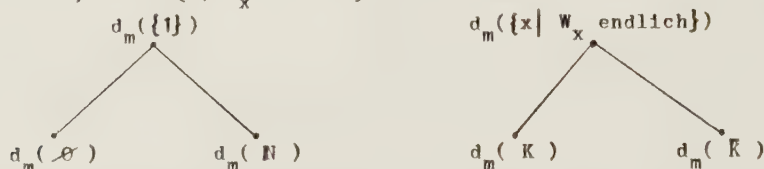
So liegt auch der Grad von $\bar{K}$ in der m -Reduzierbarkeitsordnung unter dem Grad von $\{x \mid W_x \text{ endlich}\}$. Dagegen sind, wie der folgende Satz zeigt, die m -Grade von K und $\bar{K}$ nicht miteinander vergleichbar. Damit erhalten wir - neben der bereits konstatierten m -Unvergleichbarkeit der (rekursiven) Mengen $\emptyset$ und $\mathbb{N}$ - ein Beispiel zweier nicht-rekursiver bzgl. $\leq_m$ unvergleicher Mengen.

Satz 7: $K \not\leq_m \bar{K}$.

Beweis: Nach §1.4 (vgl. S.26) ist $\bar{K}$ im Unterschied zu K nicht rekursiv auf-

zählbar. Nach Satz 1 kann daher nicht gelten $\bar{K} \leq_m K$. Da andererseits aus $K \leq_m \bar{K}$ vermöge Komplementbildung $\bar{K} \leq_m \bar{\bar{K}}$, d.h. $\bar{K} \leq_m K$ folgen würde, kann auch dies nicht gelten.

Die in Satz 2 diskutierte Struktur der rekursiven Mengen in der m -Reduzierbarkeitsordnung findet folglich - dies beiläufig - in der Struktur der m -Grade von K , $\bar{K}$ und $\{x \mid w_x \text{ endlich}\}$ eine Analogie:



Allgemeineren Aufschluß über die algebraische Struktur der m -Reduzierbarkeitsordnung gibt der folgende Satz. Dafür definieren wir vorweg eine Mengenoperation, die im folgenden noch oft eine Rolle spielen wird.

Definition: Für beliebige Mengen A, B sei

$$A \text{ Jung } B \equiv \{y \mid (y=2x \ \& \ x \in A) \text{ oder } (y=2x+1 \ \& \ x \in B)\}.$$

$A \text{ Jung } B$ ist demnach die Menge bestehend aus den doppelten Werten aller Elemente von A , sowie den doppelten Werten, vermehrt um 1, der Elemente von B . Sind die Mengen A und B bekannt, ist $A \text{ Jung } B$ durch leichte Rechnung erhältlich. Umgekehrt lassen sich aus der Kenntnis von $A \text{ Jung } B$ die Mengen A und B effektiv rekonstruieren als $A = \{\frac{y}{2} \mid y \in A \text{ Jung } B \ \& \ y \text{ gerade}\}$ und $B = \{\frac{y-1}{2} \mid y \in A \text{ Jung } B \ \& \ y \text{ ungerade}\}$. Die Operation "Jung" bildet folglich eine Möglichkeit, zwei Mengen durch eine einzige zu charakterisieren. (Sind A und B disjunkt, so wird jede Zahl von $A \cup B$ durch genau eine Zahl aus $A \text{ Jung } B$ repräsentiert; andernfalls hat ein Element von $A \cap B$ in $A \text{ Jung } B$ zwei Repräsentanten.) - Mithilfe von $A \text{ Jung } B$ können wir nun die algebraische Struktur von $\leq_m$ etwas genauer beschreiben.

Satz 8: Die m -Reduzierbarkeitsordnung ist ein oberer Halbverband, d.h. je zwei m -Grade besitzen eine kleinste obere Schranke. Darüberhinaus ist die kleinste obere Schranke zweier rekursiv aufzählbarer Mengen wieder rekursiv aufzählbar.

Beweis: Seien A und B beliebige Mengen. Dann ist der m -Grad von $A \text{ Jung } B$ die kleinste obere Schranke der m -Grade von A und B in der m -Reduzierbarkeitsordnung. Denn es gilt:

(i) $d_m(A \text{ Jung } B)$ ist obere Schranke von $d_m(A)$ und $d_m(B)$:

Dazu genügt es zu zeigen, daß sowohl $A \leq_m A \text{ Jung } B$, als auch $B \leq_m A \text{ Jung } B$. Definiere die Funktionen f und g durch $f(x) := 2x$ und $g(x) := 2x+1$ für alle x . Dann sind f und g rekursiv, und es gilt für alle x : $x \in A \iff 2x \in A \text{ Jung } B \iff f(x) \in A \text{ Jung } B$, sowie $x \in B \iff 2x+1 \in A \text{ Jung } B \iff g(x) \in A \text{ Jung } B$. Folglich $A \leq_m A \text{ Jung } B$ via f , und $B \leq_m A \text{ Jung } B$ via g .

(ii) $d_m(A \text{ Jung } B)$ ist die kleinste obere Schranke von $d_m(A)$ und $d_m(B)$:

Sei $d_m(C)$ eine beliebige obere Schranke von $d_m(A)$ und $d_m(B)$. Dann gilt $A \leq_m C$, sowie $B \leq_m C$. Zu zeigen: $A \text{ Jung } B \leq_m C$.

Gelte $A \leq_m C$ via f , und $B \leq_m C$ via g . Definiere die Funktion h durch

$$h(x) := \begin{cases} f(\frac{x}{2}), & \text{wenn } x \text{ gerade;} \\ g(\frac{x-1}{2}), & \text{wenn } x \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Dann ist h offenbar rekursiv, und es gilt für alle x : $x \in A \text{ Jung } B \iff (x \in A \text{ Jung } B \ \& \ x \text{ gerade}) \text{ oder } (x \in A \text{ Jung } B \ \& \ x \text{ ungerade}) \iff (x \text{ gerade} \ \& \ \frac{x}{2} \in A) \text{ oder } (x \text{ ungerade} \ \& \ \frac{x-1}{2} \in B) \iff (x \text{ gerade} \ \& \ f(\frac{x}{2}) \in C) \text{ oder } (x \text{ ungerade} \ \& \ g(\frac{x-1}{2}) \in C) \iff h(x) \in C$. Das heißt $A \text{ Jung } B \leq_m C$ via h .

(iii) Seien nun zudem A und B als rekursiv aufzählbar angenommen, etwa (nach Definition der rekursiven Aufzählbarkeit, vgl. §1.4, S.24 - wobei wir hier den Fall $A = \emptyset$ oder $B = \emptyset$ als trivial übergehen) $A = \text{range } f$ und $B = \text{range } g$ für rekursive Funktionen f und g ; also $A = \{f(0), f(1), f(2), \dots\}$, $B = \{g(0), \dots\}$. Dann kann $A \text{ Jung } B = \{2f(0), 2f(1), \dots, 2g(0)+1, 2g(1)+1, \dots\}$ auch so aufgezählt werden: $2f(0), 2g(0)+1, 2f(1), 2g(1)+1, \dots$ - und ist folglich $= \text{range } h$ mit

$$h(x) := \begin{cases} 2f(\frac{x}{2}), & \text{wenn } x \text{ gerade;} \\ 2g(\frac{x-1}{2})+1, & \text{wenn } x \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Da wegen f, g rekursiv auch h rekursiv, ist $A \text{ Jung } B$ per def. rekursiv aufzählbar.

Q.e.d.]

Als Korollar bemerken wir, daß $A \leq_m B$ i.a. nicht $A \leq_m \bar{B}$ impliziert. Denn für $A := B := K$ gilt zwar (wie für alle Mengen) $K \leq_m K$, nicht hingegen $K \leq_m \bar{K}$ (nach Satz 7).

Daraus folgt (wie bereits aus der m -Unvergleichbarkeit von $\emptyset$ und $\mathbb{N}$) insbesondere, daß für eine beliebige Menge B die Klasse $\mathcal{L}_m(B)$ aller auf sie m -reduzierbaren Mengen, also $\mathcal{L}_m(B) = \{A \mid A \leq_m B\}$ keine Boolesche Algebra bildet (vgl. Einleitung S.7f.). Denn andernfalls hätte zu einem beliebigen Element A aus $\mathcal{L}_m(B)$ auch sein Komplement $\bar{A}$ in $\mathcal{L}_m(B)$ zu liegen, d.h. $A \leq_m B$ müßte $\bar{A} \leq_m B$ implizieren. Dann aber wäre durch Komplementbildung $A \leq_m \bar{B}$ zu folgern - im Widerspruch zur vorausgehenden Bemerkung.

Wie man leicht sieht, kann jeder m -Grad höchstens abzählbar unendlich viele Mengen enthalten. Sei nämlich $d_m(A)$ gegeben. Dann gibt es zu allen Mengen B aus $d_m(A)$ eine rekursive Funktion f derart, daß $B = f^{-1}(A)$. Da es aber nur abzählbar unendlich viele rekursive Funktionen gibt, können in $d_m(A)$ höchstens ebenso viele Mengen liegen. - Daß es andererseits m -Grade gibt, welche weniger als unendlich viele Mengen enthalten, zeigen die (jeweils nur aus einer einzigen Menge bestehenden) m -Grade von $\emptyset$ und $\mathbb{N}$.

Das gleiche Argument zeigt auch, daß jeder m -Grad in der m -Reduzierbarkeitsordnung höchstens abzählbar unendlich viele m -Grade unter sich haben kann. Denn für $d_m(A) \leq_m d_m(B)$ gilt $A \leq_m B$ vermöge einer rekursiven Funktion f .

§2.2 m-Vollständigkeit

Gemäß unseren Ausführungen am Ende von Kapitel I soll eine rekursiv aufzählbare Menge in bezug auf eine beliebige Präzisierung des Reduzierbarkeitsbegriffs v o l l s t ä n d i g heißen, wenn jede rekursiv aufzählbare Menge – im Sinne dieses Begriffs – auf sie reduzierbar ist. So läßt sich der bislang noch informelle Begriff in bezug auf m-Reduzierbarkeit präzisieren.

Definition: A heißt vollständig in bezug auf $\leq_m$ (bzw. m-vollständig), wenn

(i) A rekursiv aufzählbar;

(ii) $\forall B [B \text{ rekursiv aufzählbar} \implies B \leq_m A]$.

Eine m-vollständige Menge ist demnach vom höchsten m-Grad unter den rekursiv aufzählbaren Mengen. Als präzierte Fassungen der informellen Beispiele in §1.4 (vgl. dort Satz 8 und Satz 9, S.34) zeigen die folgenden Sätze die Existenz m-vollständiger Mengen.

Satz 1: K_0 ist m-vollständig.

Beweis: K_0 ist rekursiv aufzählbar nach Satz 7, §1.4 .

Sei B eine beliebige rekursiv aufzählbare Menge. Zu zeigen: $B \leq_m K_0$.

Sei dazu y_0 ein rekursiv aufzählbarer Index für B, also $B = \mathbb{W}_{y_0}$. Definiere die Funktion f durch $f(x) := \langle x, y_0 \rangle$ für alle x; d.h. der f-Wert von x ist die Kodierung des geordneten Paares mit x als der ersten und dem vorgegebenen y_0 als zweiter Komponente. Da die Kodierung effektiv, ist f rekursiv, wobei für alle x gilt: $x \in B \iff x \in \mathbb{W}_{y_0} \iff \langle x, y_0 \rangle \in \{ \langle x, y \rangle \mid x \in \mathbb{W}_y \} \iff f(x) \in K_0$. Das heißt $B \leq_m K_0$.

Satz 2: K ist m-vollständig.

Beweis: K rekursiv aufzählbar: klar.

Bleibt zu zeigen, daß $K_0 \leq_m K$. Denn dann folgt für jede rekursiv aufzählbare Menge B, daß $B \leq_m K_0$, und folglich vermöge der Transitivität von $\leq_m$ auch $B \leq_m K$.

Definiere also für beliebiges x die Funktion ψ durch

$$\psi(z) := \begin{cases} 1, & \text{wenn } \mathcal{G}_{\pi_2(x)}(\pi_1(x)) \text{ definiert;} \\ \text{undefiniert,} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Da ψ partiell rekursiv, gibt es ein rekursives f derart, daß $\psi = \lambda z [\mathcal{G}_{f(x)}(z)]$. Dann gilt für alle x: $x \in K_0 \iff \langle \pi_1(x), \pi_2(x) \rangle \in K_0 \iff \mathcal{G}_{\pi_2(x)}(\pi_1(x)) \text{ definiert} \iff \psi(z) \text{ definiert für alle } z \iff \mathcal{G}_{f(x)}(z) \text{ definiert für alle } z \iff \mathcal{G}_{f(x)}(f(x)) \text{ definiert} \iff f(x) \in K$. Also $K_0 \leq_m K$ via f.

Korollar: $K \equiv_m K_0$.

Beweis: Da K_0 m-vollständig, und K rekursiv aufzählbar, gilt $K \leq_m K_0$; und da K m-vollständig, und K_0 rekursiv aufzählbar, auch $K_0 \leq_m K$.

Satz 3: $\{x \mid w_x \neq \emptyset\}$ ist m -vollständig.

Beweis: (i) Um die rekursive Aufzählbarkeit der Menge zu erkennen, benütze einfach das folgende "dovetailing"-Verfahren:

1. Stufe: Berechne $\varphi_0(0)$ einen Schritt;

2. Stufe: Berechne $\varphi_0(0), \varphi_0(1), \varphi_1(0), \varphi_1(1)$ je zwei Schritte;

⋮

n -te Stufe: Berechne $\varphi_0(0), \dots, \varphi_0(n-1), \dots, \varphi_{n-1}(0), \dots, \varphi_{n-1}(n-1)$ je n Schritte

⋮

Wenn immer eine der Berechnungen konvergiert, zähle den Index der entsprechenden Funktion auf.

(ii) Ähnlich wie im Beweis von Satz 2 genügt es zu zeigen, daß $K \leq_m \{x \mid w_x \neq \emptyset\}$. Definiere dazu für beliebiges x die Funktion ψ durch

$$\psi(z) := \begin{cases} 1, & \text{wenn } \varphi_x(x) \text{ definiert;} \\ \text{undefiniert,} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann ist ψ partiell rekursiv, und es gibt ein rekursives f derart, daß $\psi = \varphi_{f(x)}$.

Somit folgt für alle x : $x \in K \iff \varphi_x(x) \text{ definiert} \iff \varphi_{f(x)} \text{ totale Funktion} \iff \iff \exists y [\varphi_{f(x)}(y) \text{ definiert}] \iff f(x) \in \{x \mid w_x \neq \emptyset\}$.

Zum Abschluß bringen wir noch zwei Beispiele von m -Graden.

Satz 4: $\{x \mid w_x = \emptyset\} <_m \{x \mid w_x \text{ unendlich}\}$.

Beweis: Nach Satz 3 ist $\{x \mid w_x \neq \emptyset\} \equiv_m K$, und nach Satz 5 von §2.1 gilt

$K \leq_m \{x \mid w_x \text{ endlich}\}$. Daraus folgt vermöge der Transitivität von $\leq_m$ $\{x \mid w_x \neq \emptyset\} \leq_m \{x \mid w_x \text{ endlich}\}$, also durch Komplementbildung $\{x \mid w_x = \emptyset\} \leq_m \{x \mid w_x \text{ unendlich}\}$. - Angenommen, $\{x \mid w_x \text{ unendlich}\} \leq_m \{x \mid w_x = \emptyset\}$, also $\{x \mid w_x \text{ endlich}\} \leq_m \{x \mid w_x \neq \emptyset\}$. Dann wäre $\{x \mid w_x \text{ endlich}\}$ rekursiv aufzählbar - im Widerspruch zu §1.4, Satz 4. Daraus folgt die Behauptung.

Da nach Satz 4, §2.1, $\{x \mid w_x \text{ unendlich}\} \equiv_m \{x \mid \varphi_x \text{ total}\}$, gilt somit auch $\{x \mid w_x = \emptyset\} <_m \{x \mid \varphi_x \text{ total}\}$. Ist daher n ein rekursiv aufzählbarer Index der leeren Menge, so gilt $\{x \mid w_x = w_n\} <_m \{x \mid \varphi_x \text{ total}\}$. - Ist n hingegen Index einer unendlichen Menge, dann ergibt sich der folgende Satz.

Satz 5: Für festes n mit w_n unendlich gilt

$$\{x \mid w_x = w_n\} \equiv_m \{x \mid \varphi_x \text{ total}\}.$$

Beweis: (i) Zu $\{x \mid w_x = w_n\} \leq_m \{x \mid \varphi_x \text{ total}\}$.

Zu zeigen: Es gibt eine rekursive Funktion h derart, daß für alle x :

$$w_x = w_n \iff \varphi_{h(x)} \text{ total} (\iff w_{h(x)} = \mathbb{N}).$$

Definiere dazu eine zweistellige Funktion ψ durch

$$\psi(x, y) := \begin{cases} 0, & \text{falls } \varphi_{\bar{g}(x)}(y) \text{ definiert \& } \exists z [\varphi_{\bar{g}(n)}(z) = \varphi_{\bar{g}(x)}(y)] \text{ \&} \\ & \text{\& } \exists w [\varphi_{\bar{g}(x)}(w) \text{ definiert \& } \varphi_{\bar{g}(n)}(y) = \varphi_{\bar{g}(x)}(w)] ; \\ \text{undefiniert,} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dabei sei die rekursive Funktion g so gewählt, daß $\mathcal{G}_{g(x)} W_x$ ohne Wiederholungen aufzählt. ψ ist so definiert, daß $\psi(x,y) = 0$ genau dann, wenn das y -te Element der Aufzählung von W_x in W_n liegt, und umgekehrt das y -te Element der Aufzählung von W_n in W_x liegt. Also ist $\lambda y [\psi(x,y)]$ total genau dann, wenn $W_x = W_n$. Da ψ partiell rekursiv, existiert nach dem s-m-n-Theorem eine rekursive Funktion h mit $\mathcal{G}_{h(x)}(y) = \psi(x,y)$ für alle x,y . Da $h(x)$ genau dann der Index einer totalen Funktion ist, wenn $W_x = W_n$ ist, gilt $\{x \mid W_x = W_n\} \leq_m \{x \mid \mathcal{G}_x \text{ total}\}$ via h .

(ii) Zu $\{x \mid \mathcal{G}_x \text{ total}\} \leq_m \{x \mid W_x = W_n\}$.

Sei g eine rekursive Funktion, die W_n ohne Wiederholungen aufzählt. Definiere ein zweistelliges ψ durch

$$\psi(x,y) := \begin{cases} g(y), & \text{falls } \mathcal{G}_x(y) \text{ definiert;} \\ \text{undefiniert,} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Da ψ offenbar partiell rekursiv, existiert ein rekursives h mit $\psi(x,y) = \mathcal{G}_{h(x)}(y)$ für alle x,y . Dann gilt für alle x : $\mathcal{G}_x \text{ total} \Leftrightarrow \psi(x,y) = \mathcal{G}_{h(x)}(y) = g(y)$ (für alle y) $\Leftrightarrow \mathcal{G}_{h(x)}$ zählt W_n ohne Wiederholungen auf $\Leftrightarrow \Leftrightarrow \text{range } \mathcal{G}_{h(x)} = W_n \Leftrightarrow$ es existiert ein rekursives k mit $\text{range } \mathcal{G}_{h(x)} = \text{domain } \mathcal{G}_{k(h(x))} = W_n$ (vgl. §1.4, S.26) $\Leftrightarrow W_{k \circ h(x)} = W_n$. Das heißt, da $k \circ h$ rekursiv, $\{x \mid \mathcal{G}_x \text{ total}\} \leq_m \{x \mid W_x = W_n\}$ via $k \circ h$. Q.e.d.

Satz 6: $\{x \mid \mathcal{G}_x \text{ total}\} \not\leq_m \{x \mid \mathcal{G}_x \text{ nicht total}\}$.

Beweis: Indirekt. Angenommen, es existiert eine rekursive Funktion f , so daß

für alle x gilt: $\mathcal{G}_x \text{ total} \Leftrightarrow \mathcal{G}_{f(x)} \text{ nicht total}$. Definiere g durch die folgende Vorschrift: Starte (für beliebiges x) gleichzeitig das Berechnungsverfahren für $\mathcal{G}_{\pi_1(x)}(0), \dots, \mathcal{G}_{\pi_1(x)}(x)$ und $\mathcal{G}_{f(\pi_1(x))}(0), \dots$

$\dots, \mathcal{G}_{f(\pi_1(x))}(x)$. Wegen $\mathcal{G}_{\pi_1(x)}$ oder $\mathcal{G}_{f(\pi_1(x))}$ total muß mindestens ein Verfahren (für alle $x+1$ Einzelrechnungen) abbrechen. Bricht das erste

Verfahren zuerst ab, so setze $g(x) := \mathcal{G}_{\pi_1(x)}(x)+1$; bricht das zweite zuerst ab, so $g(x) := \mathcal{G}_{f(\pi_1(x))}(x)+1$. Dann ist g wohldefiniert und rekursiv. Sei $g = \mathcal{G}_{x_0}$. Dann ist nach Voraussetzung $\mathcal{G}_{f(x_0)}$ nicht total; d.h.

es gibt ein y_0 mit $\mathcal{G}_{f(x_0)}(y_0)$ nicht definiert. Wähle nun ein x' so, daß $x' = \langle x_0, y' \rangle > y_0$. Dann sind nicht alle Ausdrücke $\mathcal{G}_{f(\pi_1(x'))}(0), \dots$

$\dots, \mathcal{G}_{f(\pi_1(x'))}(x')$ definiert, während andererseits

alle $\mathcal{G}_{\pi_1(x')}(0), \dots, \mathcal{G}_{\pi_1(x')}(x')$ definiert sind. Also gilt $\mathcal{G}_{\pi_1(x')}(x') = g(x') = \mathcal{G}_{\pi_1(x')}(x')+1$ - Widerspruch!

Es ist zu bemerken, daß wir bisher noch kein Beispiel einer nicht-rekursiven rekursiv aufzählbaren Menge hatten, welche nicht m -vollständig ist. Dies legt die Frage nahe, ob etwa jede nicht-rekursive rekursiv aufzählbare Menge m -vollständig sei. Wir werden sie in §3.4 anhand sogenannter "schlichter" Mengen negativ beantworten (vgl. Satz 2 (ii), S.70).

\$2.3 Erzeugende Mengen, kreative Mengen und freie Mengen

Wir machten bereits wiederholt von der Tatsache Gebrauch, daß die Menge $\bar{K}$ nicht rekursiv aufzählbar ist. In welchem starkem und konstruktiven Sinn dies gilt, geht daraus hervor, daß man ausgehend vom Index einer beliebigen rekursiv aufzählbaren Teilmenge von $\bar{K}$ eine Zahl finden kann, die in $\bar{K}$, nicht aber in dieser Teilmenge liegt. Genauer gesagt, ist dies für eben den rekursiv aufzählbaren Index selbst der Fall; d.h. es gilt für alle x : $W_x \subset \bar{K} \implies x \in \bar{K} \setminus W_x$ (wobei " $\setminus$ " die Differenzmengenbildung im üblichen mengentheoretischen Sinn bezeichnet). Denn angenommen, daß - bei $W_x \subset \bar{K}$ - $x \in K$. Dann gilt - nach Definition von K - $x \in W_x$, und folglich nach Voraussetzung $x \in \bar{K}$ - im Widerspruch zur Annahme. Also jedenfalls $x \in \bar{K}$. Angenommen nun, daß $x \in W_x$. Dann gilt per definitionem $x \in K$, d.h. $x \notin \bar{K}$ - wieder im Widerspruch zur Voraussetzung. Also $x \notin W_x$, und damit insgesamt $x \in \bar{K} \setminus W_x$.

Auch diese Eigenschaft von $\bar{K}$, in einem konstruktiven Sinn nicht rekursiv aufzählbar zu sein, wurde bereits von Post in seiner grundlegenden Arbeit unterstrichen: "Actually, we have no general method of telling when a basis B defines a recursively enumerable subset of $\bar{K}$. Indeed, the above method will yield a unique positive integer n for any basis B of a recursively enumerable set α of positive integers. However, when α is a subset of $\bar{K}$, n will also be in $\bar{K}$, but not in α ." ("Tatsächlich haben wir kein allgemeines Verfahren, zu entscheiden, ob eine 'Basis' B eine rekursiv aufzählbare Teilmenge von $\bar{K}$ definiert. Zwar liefert obiges Verfahren zu jeder Basis B einer rekursiv aufzählbaren Menge α positiver ganzer Zahlen eine bestimmte positive ganze Zahl n . Ist dabei jedoch α eine Teilmenge von $\bar{K}$, wird auch n in $\bar{K}$, nicht aber in α liegen." (Vgl. Post(1944), a.a.O. S.295; wie auch zur Terminologie)) Da dieses Verfahren - schließt Post - selbst formalisiert werden könne, sei n als eine "rekursive Funktion von B " gegeben: "This can mean that a recursive function $f(m)$ can be set up such that $n=f(m)$ where $B=B_m$." ("Dies bedeutet, daß eine rekursive Funktion $f(m)$ so aufgestellt werden kann, daß $n=f(m)$, wenn $B=B_m$." (ebd.)) Nun hatte allerdings Post bei diesen Überlegungen weniger $\bar{K}$, als eigentlich K selbst im Sinn. Wir wollen aber, bevor wir seine Definition einer "creative set", auf welche sie abzielten, übernehmen, dem Gedankengang J.C.E.Dekkers folgen, der unter dem Begriff der "productivity" die diskutierte Eigenschaft direkt von $\bar{K}$ abstrahierte: "A set α is called p r o d u c t i v e if there exists a general method which enables us to find for any given e.e. subset β of α an element $b \in \alpha \setminus \beta$." ("Eine Menge α heißt e r z e u g e n d, wenn es ein allgemeines Verfahren gibt, welches uns zu jeder gegebenen rekursiv aufzählbaren Teilmenge β von α ein Element $b \in \alpha \setminus \beta$ finden läßt." (Vgl. Dekker(1955), a.a.O. S.129)) Wäre nun, so Dekkers Argumentation, das Komplement jeder in diesem Sinn "erzeugenden" Menge rekursiv aufzählbar, so ließen sich "kreative" Mengen (s.o.) - als, laut Post, rekursiv aufzählbare Mengen,

deren Komplement erzeugend ist - und erzeugende Mengen nur gemeinsam untersuchen. Da es jedoch - wie wir an gegebener Stelle zeigen werden - sogar Überabzählbar viele erzeugende Mengen ohne rekursiv aufzählbares Komplement gibt, eröffne dies, so Dekker, den "Weg zu einer gesonderten Untersuchung erzeugender Mengen"(ibid.). Als weiterer Grund solcher Untersuchungen erhält im Beweis des Übernächsten Satzes die, wie Dekker bemerkte, enge Beziehung zwischen erzeugenden Mengen und dem effektiven Analogon zu Cantors Diagonalverfahren.

Definition: A heißt erzeugend, wenn es eine partiell rekursive Funktion ψ gibt derart, daß für alle x gilt: $W_x \subset A \implies \psi(x)$ definiert & $\psi(x) \in A \setminus W_x$. Dann heißt ψ eine erzeugende partielle Funktion für A.

Diese Definition weicht von unseren einleitenden Bemerkungen insofern etwas ab, als - während Post ursprünglich eine kreative Menge als eine rekursiv aufzählbare, deren Komplement vermöge einer rekursiven(!) Funktion erzeugend sein sollte, definierte - wir uns nunmehr diesbezüglich mit einer partiell rekursiven begnügen. Der Grund dafür ist, daß sich zu jeder - unserer Definition entsprechenden - erzeugenden Menge eine totale erzeugende partielle Funktion konstruieren läßt, sich demnach die stärkere Forderung Posts als überflüssig erweist. Dies formulieren wir als Satz.

Satz 1: A ist erzeugend $\iff$ es existiert eine rekursive Funktion f derart, daß A erzeugend ist mit f als erzeugender partieller Funktion.

Beweis: Da jede rekursive Funktion trivialerweise partiell rekursiv ist, gilt die Implikation von rechts nach links.- Sei umgekehrt A erzeugend mit der erzeugenden partiellen Funktion ψ . Wir geben wie folgt Vorschriften für die Berechnung von f.

Erstelle -vermittelst inzwischen vertrauter Methoden - eine rekursive Funktion g derart, daß für alle z und x

$$W_{g(z,x)} = \begin{cases} W_x, & \text{wenn } z \in K; \\ \emptyset, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Sei zudem $k_0, k_1, \dots$ eine effektive Auflistung von K.

Um f(x) zu berechnen, beginne mit den Berechnungen von $\psi(x), \psi(g(k_0, x)), \psi(g(k_1, x)), \dots$ und nehme den zuerst konvergierenden Wert als f(x). Da $k_n \in K$ für alle n, ist - nach Definition von g - $g(k_n, x)$ ein Index für W_x (für alle n).

Dann ist f eine erzeugende partielle Funktion für A. Denn gelte $W_x \subset A$ und folglich: $\psi(x), \psi(g(k_0, x)), \psi(g(k_1, x)), \dots$ definiert und $\in A \setminus W_x$. Da $f(x) = \psi(g(k_n, x))$ für ein n, ist auch f(x) definiert mit $f(x) \in A \setminus W_x$.

Und f ist total. Denn angenommen, $f(x_0)$ undefiniert (mit geeignetem x_0); dann wäre $\psi(g(y, x_0))$ undefiniert für alle $y \in K$. Da aber für alle $y \in \bar{K}$ $W_{g(y, x_0)} = \emptyset$, also $g(y, x_0)$ ein Index der leeren Menge (als trivialer Teilmenge von A), und daher $\psi(g(y, x_0))$ definiert ist, wäre $\bar{K} = \{y \mid \psi(g(y, x_0)) \text{ definiert}\}$, d.h. $\bar{K}$ -domainf mit $f(y) := \psi(g(y, x_0))$, und damit $\bar{K}$ rekursiv aufzählbar. Q.e.d.

Ist eine erzeugende partielle Funktion rekursiv, so nennen wir sie eine erzeugende Funktion. Dann besagt der letzte Satz, daß zu jeder erzeugenden Menge eine erzeugende Funktion existiert. Er besitzt noch stärkere Versionen insofern, als sich, wie man zeigen kann, zu einer erzeugenden Menge A sogar eine injektive und schließlich bijektive erzeugende Funktion finden läßt. Somit ist also - laut seiner stärksten Version - jede erzeugende Menge erzeugend vermöge einer rekursiven Permutation, d.h. per definitionem einer rekursiven Bijektion auf $\mathbb{N}$. Für alle diese Verschärfungen des Satzes genügt es, von der erzeugenden partiellen Funktion der Definition auszugehen.

Betrachten wir nun, bevor wir einige elementare Eigenschaften erzeugender Mengen angeben, ein paar Beispiele. Davon ist das erste bereits bekannt.

Satz 2: $\mathbb{K}$ ist erzeugend.

Beweis: Wähle $\psi = \text{id}$ als erzeugende Funktion. Dann gilt für alle x mit $W_x \subset \mathbb{K}$: $\psi(x)$ definiert, und $\psi(x) = x \in \mathbb{K} \setminus W_x$, wie eingangs des Paragraphen erörtert.

Ist demnach $\mathbb{K}$ eine erzeugende Menge mit rekursiv aufzählbarem Komplement (!), so liefert der folgende Satz ein Beispiel einer der - wie Dekker betonte - Überabzählbar vielen erzeugenden Mengen mit nicht rekursiv aufzählbarem Komplement.

Satz 3: $\{x \mid \varphi_x \text{ total}\}$ ist erzeugend.

Beweis: Zu zeigen: Es existiert eine partiell rekursive Funktion g derart, daß für alle x gilt: $W_x \subset \{y \mid \varphi_y \text{ total}\} \implies g(x)$ definiert & $g(x) \in \{y \mid \varphi_y \text{ total}\} \setminus W_x$. Wir folgen der Konstruktion in Rogers(1967) (S.84), wobei wir uns eines Diagonalverfahrens bedienen.

Sei W_x eine rekursiv aufzählbare Menge (mit dem rekursiv aufzählbaren Index x) und f' eine - gemäß einem der Korollare zum Hauptsatz über rekursiv aufzählbare Mengen existierende - rekursive Funktion mit $\text{range } \varphi_{f'(x)} = W_x$, und $\varphi_{f'(x)}$ total, falls $W_x \neq \emptyset$. Dann definiere die partielle Funktion ψ wie folgt:

$$\psi(z) := \begin{cases} 0, & \text{wenn } P_{f'(x)} \text{ in Anwendung auf } 0 \text{ nicht in } z \text{ oder weniger Schritten} \\ & \text{konvergiert;} \\ \varphi_{f'(x)}^{(z-z_0)}(z)+1, & \text{sonst (wobei } z_0 \text{ genau die Zahl der Schritte sei,} \\ & \text{in denen } P_{f'(x)} \text{ in Anwendung auf } 0 \text{ konvergiert.} \end{cases}$$

Nach dem s-m-n-Theorem existiert eine rekursive Funktion g mit $\psi(z) = \varphi_{g(x)}(z)$ für alle z . Wir zeigen, daß das so gefundene g eine erzeugende Funktion für $\{x \mid \varphi_x \text{ total}\}$ darstellt.

Sei dazu $W_x \subset \{y \mid \varphi_y \text{ total}\}$. Ist $W_x = \emptyset$, so ist $\varphi_{f'(x)}(0)$ undefiniert. Es gilt also $\varphi_{g(x)} \equiv \text{const. } 0$, d.h. $g(x) \in \{y \mid \varphi_y \text{ total}\} \setminus W_x$.

Sei also o.B.d.A. $W_x \neq \emptyset$. Dann ist $\varphi_{f'(x)}$ total. Da insbesondere $\varphi_{f'(x)}(0)$

definiert ist, gibt es ein kleinstes z_0 derart, daß $P_{f'(x)}$ in Anwendung auf 0 in z_0 Schritten konvergiert. Also gilt $\mathcal{G}_{f'(x)}(z) = \psi(z) = 0$ für alle $z < z_0$. Wählt man $z \geq z_0$, so ist wegen $\mathcal{G}_{f'(x)}$ total und $\text{range } \mathcal{G}_{f'(x)} = W_x$ der Wert $\mathcal{G}_{f'(x)}(z - z_0)$ definiert und Element von W_x , d.h. Index einer totalen Funktion. Also ist auch $\mathcal{G}_{g(x)}(z) = \psi(z) = \mathcal{G}_{f'(x)}(z - z_0) + 1$ definiert. Da folglich $\mathcal{G}_{g(x)}$ total, gilt $g(x) \in \{y \mid \mathcal{G}_y \text{ total}\}$.
 Zu zeigen bleibt: $g(x) \notin W_x$.

Indirekt. Angenommen, $g(x) \in W_x$. Dann läße es ein y mit $g(x) = \mathcal{G}_{f'(x)}(y)$. Für $z = y + z_0$ wäre dann $\mathcal{G}_{g(x)}(z) = \mathcal{G}_{f'(x)}(z - z_0) + 1 = \mathcal{G}_{f'(x)}(y) + 1 = \mathcal{G}_{g(x)}(z) + 1$ - Widerspruch, da $\mathcal{G}_{g(x)}$ total. Q.e.d.

Da $\{x \mid \mathcal{G}_x \text{ nicht total}\}$ nicht rekursiv aufzählbar (vgl. §1.4, Satz 3), ist $\{x \mid \mathcal{G}_x \text{ total}\}$ eine erzeugende Menge ohne rekursiv aufzählbares Komplement. Da zudem auch $\{x \mid \mathcal{G}_x \text{ nicht total}\}$ erzeugend ist, wie sich im folgenden noch erweist, haben wir hier zwei Mengen mit der Eigenschaft, daß sowohl sie selbst als auch ihre Komplemente erzeugend sind.

Ihrer Definition zufolge verfügen wir im Fall einer erzeugenden Menge über ein effektives Verfahren, von einer beliebig gegebenen ihrer rekursiv aufzählbaren Teilmengen zu einer größeren rekursiv aufzählbaren Teilmenge zu gelangen. Das besagt - unter anderem - der folgende Satz.

Satz 4: (a) A erzeugend $\implies A$ nicht rekursiv aufzählbar.

(b) A erzeugend $\implies A$ besitzt eine unendliche rekursiv aufzählbare Teilmenge.

(c) A erzeugend $\implies A$ besitzt eine unendliche rekursive Teilmenge.

Beweis: (a) Ergibt sich unmittelbar aus der Definition; denn wäre A rekursiv aufzählbar, etwa $A = W_x$, so wäre wegen $A \subset A$, i.e. $W_x \subset W_x$, die zugehörige erzeugende partielle Funktion ψ für x definiert mit $\psi(x) \in W_x \setminus W_x = \emptyset$ - Widerspruch.

(b) Wir begnügen uns, da er Überzeugend genug scheint, mit einem informellen Beweis (wie in Post(1944), a.a.O. S.296, und Dekker(1955), a.a.O. S.136; für eine formale Version vgl. Rogers(1967), S.90f.).

Sei dazu ψ eine erzeugende partielle Funktion für A . Wir gewinnen ein rekursives g , dessen Bild eine unendliche - per definitionem rekursiv aufzählbare - Teilmenge von A ist, wie folgt. Sei z_0 ein rekursiv aufzählbarer Index der leeren Menge. Da $W_{z_0} = \emptyset \subset A$, ist $\psi(z_0)$ definiert und Ele-

ment von A . Setze $g(0) := \psi(z_0)$. Sei nun z_1 ein rekursiv aufzählbarer Index für $\{g(0)\} \subset A$; dann ist $\psi(z_1)$ definiert und Element von $A \setminus \{g(0)\}$, insbesondere $\psi(z_1) \neq g(0)$. Setze $g(1) := \psi(z_1)$. Allgemein für den Schritt von n nach $n+1$: Sei z_{n+1} ein rekursiv aufzählbarer Index für die (endliche) Menge $\{g(0), g(1), \dots, g(n)\}$. Setze $g(n+1) := \psi(z_{n+1})$. Da g offenbar injektiv, ist $\text{range } g \subset A$ unendlich.

(c) Da jede unendliche rekursiv aufzählbare Menge eine unendliche rekursive Menge enthält (vgl. §1.4, S.25), folgt die Behauptung trivialerweise aus (b).

Satz 5 schließlich (vgl. Dekker(1953), a.a.O. S.499f.) stellt eine wichtige Verbindung zwischen erzeugenden Mengen und dem Begriff der m -Reduzierbarkeit her.

Satz 5: A erzeugend & $A \leq_m B \implies B$ erzeugend.

Beweis: Sei ψ eine erzeugende partielle Funktion für A , sowie $A \leq_m B$ via f .

Wir beweisen vorweg die Existenz einer rekursiven Funktion g mit $W_{g(x)} = f^{-1}(W_x)$ für alle x . Definiere dazu für beliebige x und y

$$\psi(x, y) := \begin{cases} 1, & \text{wenn } g_x(f(y)) \text{ definiert;} \\ \text{undefiniert,} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Da ψ offenbar partiell rekursiv, liefert das s - m - n -Theorem ein rekursives g mit $g_{g(x)}(y) = \psi(x, y)$ für alle x, y . Dann gilt für alle x, y : $y \in W_{g(x)} \iff g_{g(x)}(y) \text{ definiert} \iff \psi(x, y) \text{ definiert} \iff g_x(f(y)) \text{ definiert} \iff f(y) \in W_x \iff y \in f^{-1}(W_x)$; also $W_{g(x)} = f^{-1}(W_x)$, und g leistet das Gewünschte.

Dann ist $\rho := f \circ \psi \circ g$ eine erzeugende partielle Funktion für B . Denn für $W_x \subset B$ gilt $f^{-1}(W_x) = W_{g(x)} \subset f^{-1}(B)$ und, da $A \leq_m B$ via f , $f^{-1}(B) \subset A$; also $W_{g(x)} \subset A$. Dann ist $\psi(g(x))$ definiert mit $\psi(g(x)) \in A \setminus W_{g(x)}$. Dann ist $\rho(x) = f(\psi(g(x)))$ definiert und, wegen $A \leq_m B$ via f , $\rho(x) \in B$; außerdem $\rho(x) \notin W_x$, da sonst $\psi(g(x)) \in f^{-1}(W_x) = W_{g(x)}$. Also $\rho(x) \in B \setminus W_x$; was zu zeigen war.

Satz 5 besagt, daß die Eigenschaft, erzeugend zu sein, sich in der m - (wie später auch in der 1-) Reduzierbarkeitsordnung nach oben vererbt, und liefert damit ein nützliches Werkzeug zum Nachweis der Produktivität einer Menge. So ist mit seiner Hilfe etwa die Produktivität von $\{x \mid g_x \text{ total}\}$ viel bequemer zu zeigen als durch die direkte Diagonalisierung im Beweis von Satz 3. Denn da - nach Satz 2 - K erzeugend, und $\bar{K} \leq_m \{x \mid g_x \text{ total}\}$ (vgl. §2.1, Satz 4 und Satz 5), folgt die Behauptung unmittelbar aus Satz 5.- Da weiter $\bar{K} \leq_m \{x \mid W_x \text{ endlich}\}$, also $K \leq_m \{x \mid W_x \text{ unendlich}\}$, sowie $\{x \mid W_x \text{ unendlich}\} \equiv_m \{x \mid g_x \text{ total}\}$ (vgl. *ibid.*), gilt $K \leq_m \{x \mid g_x \text{ total}\}$, und folglich $\bar{K} \leq_m \{x \mid g_x \text{ nicht total}\}$, woraus - wieder mit Satz 5 - folgt, daß, wie bereits vermerkt (S.50), auch $\{x \mid g_x \text{ nicht total}\}$ erzeugend ist.-

Unsere relativ ausführliche Behandlung des Begriffs der erzeugenden Menge rührt nicht zuletzt aus der entscheidenden Rolle, welche er bei den Anwendungen der Rekursionstheorie in der Logik spielt. So läßt etwa das "Unvollständigkeits-Phänomen" (Gödel(1931), Tarski(1936)) sich am einfachsten durch die Formulierung beschreiben, daß in jedem formalen System - welches, wie beispielsweise die elementare Arithmetik, einen gewissen minimalen Grad an Komplexität aufweist, und für das der Wahrheitsbegriff in natürlicher Weise definiert werden kann - die Klasse der wahren Formeln erzeugend (und folglich nicht rekursiv aufzählbar) ist. Aufgrund dessen vermag keine Axiomatisierung der Mathematik alle wahren Sätze der Arithmetik zu umfassen, und aus jeder Axiomatisierung, die nur wahre Sätze liefert, läßt ein neuer wahrer Satz sich finden, der im Rahmen dieser Axiomatisierung nicht beweisbar ist. "To summarize informally: no axiomatization of mathematics can exactly capture all true statements of elementary arithmetic; and from any axiomatization which yields only true statements of elementary arithmetic, a new true statement can be found not provable in that axiomatization. These facts lend special significance to our study of productiveness. Post believed that such facts manifest an essentially creative quality of mathematics; hence the name *creative set*" (Rogers(1967), S.98). Die Bemerkung Posts, auf die Rogers anspielt, lautete: "The conclusion is unescapable that even for such a fixed, well defined body of mathematical propositions, mathematical thinking is, and must remain, essentially creative. To the writer's mind, this conclusion must inevitably result in at least a partial reversal of the entire axiomatic trend of the late nineteenth and early twentieth centuries, with a return to meaning and truth as being of the essence of mathematics" ("Die Schlußfolgerung ist unausweichlich, daß sogar für solch einen festen, wohldefinierten Korpus mathematischer Sätze mathematisches Denken wesentlich kreativ ist, und es auch bleiben muß. Der Ansicht des Verfassers nach muß dieser Schluß unvermeidlicherweise hinauslaufen auf einen zumindest teilweisen Umschwung der gesamten axiomatischen Strömung des späten neunzehnten und frühen zwanzigsten Jahrhunderts, und eine Rückkehr zu Bedeutung und Wahrheit als dem Wesen der Mathematik zugehörend" (Post(1944), a.a.O. S.295.)) Als eine "creative set C" definierte Post "a recursively enumerable set of positive integers for which there exists a recursive function giving a unique positive integer n for each basis B of a recursively enumerable set of positive integers α such that whenever α is a subset of $\bar{C}$, n is also in $\bar{C}$, but not in α " (ebd. S.295f.). Mit den terminologischen Modifikationen Dekkers erhalten wir die folgende Definition.

Definition: A kreativ, falls (i) A rekursiv aufzählbar;
(ii) $\bar{A}$ erzeugend.

Mit Post(1944) (ibid. S.296) formulieren wir

Satz 6: Es gibt eine kreative Menge; nämlich die Menge K .

Beweis: (i) K rekursiv aufzählbar: klar;

(ii) $\bar{K}$ erzeugend: Satz 2.

Als nächstes Beispiel wählen wir eine kreative Menge, welche an Quines in Analogie zur Russell-Klasse gebildete Menge $\{x | \exists y [x \in y \ \& \ y \in x]\}$ erinnert.

Satz 7: $\{x | \exists y [x \in W_y \ \& \ y \in W_x]\}$ ist kreativ.

Beweis: (i) $Q := \{z | \exists y [z \in W_y \ \& \ y \in W_z]\}$ ist rekursiv aufzählbar nach dem Zweiten Projektionstheorem (vgl. §1.4, S.32f.).

(ii) Wir zeigen, daß $\bar{Q} = \{z | \forall y [z \in W_y \implies y \notin W_z]\}$ mit id als (rekursiver) erzeugender Funktion erzeugend ist.

Sei nämlich x mit $W_x \subset \bar{Q}$ gegeben. Zu zeigen: $\text{id}(x) = x \in \bar{Q} \setminus W_x$, d.h. für alle y gilt: $x \notin W_y$ & $(x \in W_y \implies y \notin W_x)$.

Sei daher y mit $x \in W_y$ gegeben. Angenommen, $y \in W_x$. Dann gilt nach Voraussetzung $y \in \bar{Q}$, d.h. $\forall w [y \in W_w \implies w \notin W_y]$, und folglich für $w=x$ $x \notin W_y$ - im Widerspruch zur Wahl von y . Also $y \notin W_x$.

Nehmen wir weiter an, daß $x \in W_x$. Dann gilt nach Voraussetzung $x \in \bar{Q}$, d.h. $\forall y [x \in W_y \implies y \notin W_x]$. Für $y=x$ folgt dann $x \notin W_x$ - im Widerspruch zur Annahme. Also $x \notin W_x$. Q.e.d.

Satz 8: $\{x | W_x \neq \emptyset\}$ ist kreativ.

Beweis: (i) Nach §2.2 ist $\{x | W_x \neq \emptyset\}$ m -vollständig (Satz 3, S.45), insbesondere rekursiv aufzählbar.

(ii) Da $K \leq_m \{x | W_x \neq \emptyset\}$ (vgl. ibid., da K ebenfalls m -vollständig), und daher $\bar{K} \leq_m \{x | W_x = \emptyset\}$, ist nach Satz 5 $\{x | W_x = \emptyset\}$, also $\overline{\{x | W_x \neq \emptyset\}}$ erzeugend.

Trivialerweise ist jede kreative Menge C eine rekursiv aufzählbare, nicht-rekursive Menge. Denn da $\bar{C}$ erzeugend und folglich (Satz 4 (a)) nicht rekursiv aufzählbar ist, kann C nicht rekursiv sein. Das Entscheidungsproblem einer kreativen Menge ist daher, wie Post bemerkt, rekursiv unlösbar.

Der folgende Satz stellt einfache, aber wichtige Zusammenhänge zwischen Kreativität und m -Reduzierbarkeit bzw. -Vollständigkeit her.

Satz 9: (a) A kreativ & $A \leq_m B \implies \bar{B}$ erzeugend.

(b) A m -vollständig $\implies A$ kreativ.

Beweis: (a) Da, wenn A kreativ und $A \leq_m B$, $\bar{A}$ erzeugend und $\bar{A} \leq_m \bar{B}$, folgt die Behauptung nach Satz 5.

(b) Wenn A m -vollständig, gilt $K \leq_m A$, mithin $\bar{K} \leq_m \bar{A}$, und daraus folgt, da $\bar{K}$ erzeugend, wieder mit Satz 5, daß $\bar{A}$ erzeugend. Dann ist A , da nach Voraussetzung rekursiv aufzählbar, kreativ. Q.e.d.

Als illustrative Anwendung von Satz 9 bringen wir noch

Satz 10: $A \text{ kreativ} \Rightarrow A \times A \text{ kreativ}$.

Beweis: (i) Da A nach Voraussetzung rekursiv aufzählbar, ist es auch $A \times A$.

Liste nämlich $A \times A$ in der Form $(a_0, a_0), (a_0, a_1), (a_1, a_0), (a_0, a_2), (a_1, a_1), (a_2, a_0), (a_0, a_3), (a_1, a_2), \dots$ und berechne $\tau(A \times A) = A \times A$ in derselben Reihenfolge (wobei $a_0, a_1, \dots$ eine Aufzählung von A).

(ii) Da $A \leq_m A \times A$ via f mit $f(x) := \langle x, x \rangle$ für alle x , folgt mit Satz 9(a) daß $\overline{A \times A}$ erzeugend.

Insgesamt $A \times A$ kreativ.

Unter den Fragen, welche unsere bisherige Untersuchung aufwirft, sind es - neben der problematischen m -Vollständigkeit der nicht-rekursiven, rekursiv aufzählbaren Mengen - vor allem noch drei, denen wir im folgenden nachgehen werden:

(i) Ist jede nicht-rekursive, rekursiv aufzählbare Menge kreativ?

(ii) Gilt auch die Umkehrung von Satz 9 (b); d.h. ist jede kreative Menge m -vollständig?

(iii) Ist jede nicht rekursiv aufzählbare Menge erzeugend?

Wir beantworten zuerst - noch in diesem Paragraphen - die letzte dieser Fragen, und zwar negativ, indem wir die Existenz einer unendlichen Menge zeigen, welche keine unendliche rekursiv aufzählbare Teilmenge enthält. Dann ist aus Satz 4 (b) zu folgern, daß diese Menge nicht erzeugend sein kann. Damit erhalten wir ein Beispiel einer nicht rekursiv aufzählbaren, nicht erzeugenden Menge. Wieder war es Dekker, der diesen Mengen ihren Namen gab (vgl. Dekker(1953), a.a.O. S.496).

Definition: A heißt frei ("immune", im Original), wenn

(i) A unendlich;

(ii) $\forall B [B \text{ unendlich} \ \& \ B \text{ rekursiv aufzählbar} \Rightarrow B \cap \bar{A} \neq \emptyset]$.

Satz 11: Es existiert eine freie Menge.

Beweis: Wir bedienen uns zur Konstruktion der freien Menge A eines nichtkonstruktiven Diagonalarguments.

Sei $A_0, A_1, A_2, \dots$ eine - nichteffektive! - Aufzählung der unendlichen rekursiv aufzählbaren Mengen. Dann definiere die Zahlenfolge $a_0, a_1, a_2, \dots$ rekursiv durch: $a_0 := \mu x [x \in A_0] + 1$; und, unter der Voraussetzung, daß a_n bereits definiert: $a_{n+1} := \mu x [x \in A_{n+1} \ \& \ x > a_n] + 1$.

Da sich aufgrund der Unendlichkeit aller A_n in jedem der A_{n+1} ein x mit $x > a_n$ (für $n \geq 1$) finden läßt, ist die Folge der a_n wohldefiniert und streng monoton steigend.- Definiere nun A als die Menge aller Folgenglieder, i.e. $A = \{a_n | n \in \mathbb{N}\}$. Dann ist A offenbar unendlich und enthält, wie wir nun zeigen, keine unendliche rekursiv aufzählbare Teilmenge. Denn nehme an, $A_n \subset A$ für ein $n \in \mathbb{N}$.

Ist $n=0$, dann gilt für $x := \mu z [z \in A_0]$, $a_0 = x+1$: $x < a_0 < a_1 < \dots$, also $x \notin A_n$ für alle n , d.h. $x \notin A$ - im Widerspruch zu $x \in A_0$. Ist dagegen $n \geq 1$, so gilt für $x := \mu z [z \in A_n \ \& \ z > a_{n-1}]$, $a_n = x+1$: $a_{n-1} < x < a_n$, also $x \in A_n \setminus A$: Widerspruch. Also $A_n \not\subset A$ für alle n . Insgesamt folgt, daß A frei.

Es ist zuweilen nützlich, in kanonischer Weise ausdrücken zu können, daß das Komplement einer Menge eine bestimmte Eigenschaft besitzt. Wir treffen daher die Vereinbarung, für eine beliebige Eigenschaft P eine Menge "ko- P " zu nennen, wenn ihr Komplement die Eigenschaft P besitzt. So heißt beispielsweise eine Menge "ko-endlich", wenn ihr Komplement endlich ist. Ferner sind nach dieser Sprechweise die rekursiven Mengen genau die rekursiv aufzählbaren, ko-rekursiv-aufzählbaren Mengen; die kreativen wiederum die rekursiv aufzählbaren, ko-erzeugenden Mengen.- Der folgende Satz seinerseits besagt, daß es Überabzählbar viele freie, ko-freie Mengen gibt.

Satz 12: Es existieren Überabzählbar viele Mengen A derart, daß sowohl A als auch $\bar{A}$ frei ist.

Beweis: Sei $x_0, x_1, x_2, \dots$ eine - nicht-effektive! - streng monoton wachsende Aufzählung der Menge $\{x \mid W_x \text{ unendlich}\}$ ($x_0 < x_1 < x_2 < \dots$). Definiere eine Folge von Paarmengen $\{y_0, z_0\}, \{y_1, z_1\}, \dots$ rekursiv durch
 $\{y_0, z_0\} :=$ Menge der zwei kleinsten Elemente von W_{x_0} (wobei $y_0 < z_0$); und
 $\{y_{k+1}, z_{k+1}\} :=$ Menge der zwei kleinsten Elemente von $W_{x_{k+1}}$, die beide größer sind als sowohl y_k als auch z_k (wobei $y_{k+1} < z_{k+1}$).

Wir bilden nun eine Menge A , indem wir aus jedem Glied dieser Paarmengenfolge ein Element herausnehmen. Dann ist sowohl A als auch $\bar{A}$ (welches das in dem Glied jeweils verbleibende andere Element enthält) unendlich. Da A mit jeder unendlichen rekursiv aufzählbaren Menge einen nichtleeren Durchschnitt hat, ist $\bar{A}$ frei; und dasselbe gilt vice versa für A . Also A und $\bar{A}$ frei. Da es nun Überabzählbar viele verschiedene Möglichkeiten gibt, aus jedem Glied der - abzählbar unendlichen - Paarmengenfolge ein Element herauszugreifen, erhalten wir Überabzählbar viele solche Mengen A . Q.e.d.

Mithilfe des sog. **R e k u r s i o n s t h e o r e m s** (vgl. Rogers(1967), Chapter 11) beantwortet Myhill(1955) Frage (ii). positiv: Jede kreative Menge ist m-vollständig. Die Begriffe der Kreativität und m-Vollständigkeit sind daher äquivalent (vgl. dazu weiter §3.2, S.69).

Dagegen entscheiden wir Frage (i) in §3.4 (S.79) anhand sog. "schlichter" Mengen negativ: Nicht jede nicht-rekursive, rekursiv aufzählbare Menge ist kreativ (und damit m-vollständig).-

§3.1 Definition und Eigenschaften. Der Satz von Myhill

Entsprechend unserer Bemerkung vor der Definition der m -1-Reduzierbarkeit (S.37) gelangen wir durch die zusätzliche Forderung einer injektiven Reduktionsfunktion zu einem engeren Reduzierbarkeitsbegriff, der 1-1-Reduzierbarkeit, welche gleichfalls von Post angeregt wurde: "If, furthermore, different n 's always lead to different m 's, we shall say that S_1 is one - one reducible to S_2 " ("Führen darüberhinaus verschiedene n 's stets auch zu verschiedenen m 's, so nennen wir S_1 eins - eins reduzierbar auf S_2 " (Post(1944), a.a.O. S.297; vgl. dazu S.37)). Es ist klar, daß bei dieser Forderung die Reduktion einer Menge auf eine andere mit kleinerer Mächtigkeit nicht länger möglich ist. So können wir zum Beispiel - im Unterschied zu $\leq_m$ - nicht mehr jede von $\emptyset$ und $\mathbb{N}$ verschiedene rekursive Menge auf die Einermenge $\{1\}$ reduzieren, und bereits die dadurch bedingte neue Struktur der rekursiven Mengen (bzgl. 1-1-Reduzierbarkeit) zeigt, daß es sich dabei um einen von $\leq_m$ weitgehend verschiedenen Begriff handelt.

Definition: A heißt 1-1-reduzierbar auf B (in Zeichen: $A \leq_1 B$), wenn es eine injektive rekursive Funktion f gibt derart, daß für alle x gilt: $x \in A \iff f(x) \in B$. - Als Abkürzung schreiben wir: A "1-reduzierbar" auf B . Wieder heißt, wenn $A = f^{-1}(B)$ und f injektiv, $A \leq_1 B$ v i a (bzw. ü b e r oder v e r m ö g e) f .

Die notwendigen Bedingungen, welche wir für jede Präzisierung des intuitiven Reduzierbarkeitsbegriffs formuliert haben, sind im Fall von $\leq_1$ aus nahezu denselben Gründen erfüllt wie bei $\leq_m$. Da auch für $A \leq_1 B$ via f die Gleichung $c_A = c_B \circ f$ gilt, ist im Fall der Rekursivität von B - i.e. der charakteristischen Funktion von B - auch c_A rekursiv, und damit A . Desgleichen ist $\leq_1$ als Relation zwischen Mengen natürlicher Zahlen reflexiv, da die Identitätsfunktion id - vermöge der $A \leq_m A$ für alle A gilt - injektiv ist; also auch $A \leq_1 A$ via id . - Ähnliches gilt für die Transitivität. Wenn $A \leq_1 B$ via f , und $B \leq_1 C$ via g , dann folgt $A \leq_1 C$ via h mit $h := g \circ f$, da, wenn f und g injektiv, dies auch für ihre Komposition gilt. Folglich $\leq_1$ transitiv.

Als ersten Satz formulieren wir die Tatsache, daß $\leq_m$ eine echte Verallgemeinerung von $\leq_1$ ist; d.h. daß $\leq_1$ zwar $\leq_m$ impliziert, es aber Beispiele für 1-Reduktionen gibt, welche keine m -Reduktionen sind.

Satz 1: Für alle Mengen A, B gilt: $A \leq_1 B \implies A \leq_m B$.

Doch existieren A, B derart, daß $A \leq_m B$, aber $A \not\leq_1 B$.

Beweis: (i) Wenn $A \leq_1 B$ via f , dann gilt per definitionem für alle x : $x \in A \iff f(x) \in B$, d.h. per definitionem $A \leq_m B$. Dabei spielt es keine Rolle, daß f injektiv ist.

(ii) Es gilt $\{1,2\} \leq_m \{1\}$ vja f mit $f(1) := f(2) := 1$ und $f(x) := 2$ für alle $x \neq 1, x \neq 2$. Nicht hingegen $\{1,2\} \leq_1 \{1\}$, da die zwei Elemente der ersten Menge durch jede injektive Funktion auf zwei verschiedene Zahlen abgebildet werden, die nicht in einer Einermenge liegen können.

Satz 2: $A \leq_1 B$ & B rekursiv aufzählbar $\implies A$ rekursiv aufzählbar.

Beweis: Wie von Satz 1, §2.1, S.38.

Wir bemerkten bereits, daß es im Fall der 1-Reduzierbarkeit im Unterschied zu $\leq_m$ nicht möglich ist, eine Menge auf eine von geringerer Mächtigkeit zu reduzieren. Insbesondere sind unendliche Mengen nicht mehr auf endliche zu reduzieren. Gilt $A \leq_1 B$, und ist A unendlich, so ergibt sich aus der Injektivität der Reduktionsfunktion unmittelbar die Unendlichkeit von B . Es gilt: $A \leq_m B \iff f(A) \subset B$ & $f(\bar{A}) \subset \bar{B}$. Für die 1-Reduzierbarkeit gilt nur die Implikation von links nach rechts.

Entsprechend unseren Leitlinien werden die "1-Grade" definiert.

Definition: $A \equiv_1 B \iff A \leq_1 B$ & $B \leq_1 A$.

Bezeichnung: A 1-äquivalent mit B .

Wie $\equiv_m$ ist auch $\equiv_1$ eine Äquivalenzrelation auf der Potenzmenge der natürlichen Zahlen. Die Äquivalenzklassen von $\equiv_1$ heißen Grade der Unlösbarkeit in bezug auf 1-Reduzierbarkeit oder 1-Grade. Mit " $d_1(A)$ " bezeichnen wir den 1-Grad der Menge A , d.h. wir definieren: $d_1(A) := \{B \mid A \equiv_1 B\}$. Die durch die Definition

$$d_1(A) \leq_1 d_1(B) \iff A \leq_1 B \quad (\text{für beliebige Mengen } A, B)$$

auf der Gesamtheit der 1-Grade induzierte partielle Ordnung heißt die 1-Reduzierbarkeitsordnung. Gilt $d_1(A) \leq_1 d_1(B)$, nicht aber zugleich $d_1(B) \leq_1 d_1(A)$, so schreiben wir $d_1(A) <_1 d_1(B)$. Dann liegt $d_1(A)$ unter $d_1(B)$, bzw. $d_1(B)$ über $d_1(A)$; A ist von niedrigerem 1-Grad als B , bzw. B von höherem 1-Grad als A . Gilt weder $d_1(A) \leq_1 d_1(B)$ noch $d_1(B) \leq_1 d_1(A)$, d.h. sind $d_1(A)$ und $d_1(B)$ unvergleichbar, so schreiben wir in Zeichen: $d_1(A) \parallel d_1(B)$.

Aus dem gleichen Grund wie im Fall von $\leq_m$ gilt auch für $\leq_1$, daß jeder 1-Grad, welcher eine rekursive Menge enthält, zur Gänze aus rekursiven Mengen besteht. Dasselbe folgt für rekursiv aufzählbare Mengen (Satz 2). Wir können demnach auch im Zusammenhang mit der 1-Reduzierbarkeitsordnung von rekursiven bzw. rekursiv aufzählbaren Graden sprechen. Wie Satz 2 weiter zeigt, vererbt auch in der 1-Reduzierbarkeitsordnung rekursive Aufzählbarkeit sich nach unten: Jeder 1-Grad unterhalb eines rekursiv aufzählbaren 1-Grades ist seinerseits rekursiv aufzählbar. Analog zu Satz 2, §2.1, analysiert der folgende Satz die Struktur der rekursiven Mengen unter $\leq_1$, wobei sich ein grundsätzlicher Unterschied zwischen den beiden Reduzierbarkeitsordnungen ergibt.

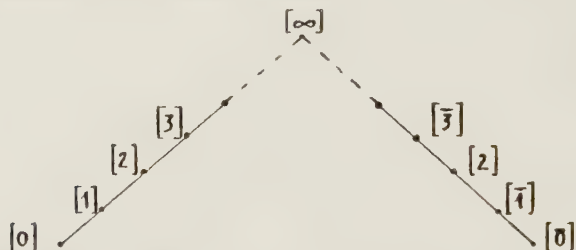
Satz 3: Es existieren in der 1-Reduzierbarkeitsordnung unendlich viele rekursive Grade, nämlich

$[k] := \{A \mid |A| = k\}$ für alle $k \in \mathbb{N}$;

$[\bar{k}] := \{A \mid |\bar{A}| = k\}$ für alle $k \in \mathbb{N}$; und

$[\infty] := \{A \mid |A| = |\bar{A}| = \infty\}$.

Dabei herrscht die folgende Struktur:



Beweis: Wir zeigen zuerst, daß für alle $k, l \in \mathbb{N}$ mit $k < l$ gilt, daß $[k] \leq_1 [l]$, d.h. $[k] \leq_1 [l]$, nicht aber $[l] \leq_1 [k]$.

Sei nämlich A aus $[k]$, B aus $[l]$. Dann hat A k Elemente, B l Elemente. Ordne die Elemente beider Mengen der Größe nach an und setze sodann jede dieser Folgen durch Hinzufügung der Elemente der entsprechenden Komplemente (ebf. der Größe nach) zu einer unendlichen fort. Indem man nun dem bzgl. der Anordnung n -ten Element von A ($n \leq k$) das n -te Element von B zuordnet, und ebenso dem n -ten Element von $\bar{A}$ das n -te Element von $\bar{B}$, erhält man eine rekursive injektive Funktion f , vermöge welcher A 1-reduzierbar auf B ist. Also $[k] \leq_1 [l]$. Während bei diesem Verfahren wegen $k < l$ jedem Element von A injektiv ein Element von B zugeordnet werden konnte, ist dies im umgekehrten Fall nicht mehr möglich. Also $B \not\leq_1 A$, und folglich $[k] <_1 [l]$.

Analog verfährt man für $[\bar{k}] <_1 [\bar{l}]$ für $k, l \in \mathbb{N}$ mit $k < l$. Während auch hier jedem Element von $\bar{A}$ mit A aus $[\bar{k}]$ injektiv ein Element von $\bar{B}$ mit B aus $[\bar{l}]$ zugeordnet werden kann, ist dies umgekehrt nicht möglich. Also $[\bar{k}] <_1 [\bar{l}]$.

Da jede Menge aus $[k]$ (für beliebiges $k \in \mathbb{N}$) bzw. $[\bar{k}]$ auf jede unendliche Menge mit unendlichem Komplement 1-reduzierbar ist, nicht aber umgekehrt (wegen der Endlichkeit der Menge im einen Fall, und ihres Komplements im anderen), gilt sowohl $[k] <_1 [\infty]$, als auch $[\bar{k}] <_1 [\infty]$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

Da schließlich jede Menge A aus $[k]$ (k beliebig) ein unendliches Komplement besitzt, jede Menge B aus $[\bar{l}]$ hingegen ein endliches (1 beliebig), folgt $[k] \not\leq_1 [\bar{l}]$ für alle $k, l \in \mathbb{N}$. Aus Symmetriegründen gilt $[\bar{l}] \not\leq_1 [k]$. Also $A \not\leq_1 B$ für alle A aus $[k]$, B aus $[\bar{l}]$ (k, l beliebig), und damit $[k] \not\leq_1 [\bar{l}]$ für alle $k, l \in \mathbb{N}$. Q.e.d.

Satz 3 von §2.1 (S.40) zeigte die m -Reduzierbarkeit jeder rekursiven Menge auf jede beliebige von $\mathcal{O}$ und $\mathbb{N}$ verschiedene Menge, insbesondere auch nicht-rekursive. Daß dies bei $\leq_1$ nicht gilt, zeigt - neben Satz 3 - der folgende Satz.

Satz 4: Es gibt Mengen A und B derart, daß A rekursiv, B nicht rekursiv, mit $A \not\leq_1 B$.

Beweis: Wähle für A eine unendliche rekursive Menge und für B eine freie Menge, wie wir sie in §2.3 (S.54) definiert haben, also eine unendliche Menge, welche keine unendliche rekursiv aufzählbare Teilmenge enthält (die Existenz freier Mengen ist ebd. in Satz 11 bewiesen). Da nun im Fall von $A \leq_1 B$ via f die Menge f(A) eine rekursiv aufzählbare unendliche Teilmenge von B wäre, stünde dies im Widerspruch zur Wahl von B. Also $A \not\leq_1 B$.

Als Beispiele für 1-Reduktionen übernehmen wir unsere m-Reduktionen der Sätze 4, 5, 6 aus §2.1, sowie der Sätze 4 und 5 aus §2.2. Der Beweis des folgenden Satzes begründet, warum dies möglich ist.

Satz 5: (i) $\{x \mid W_x \text{ unendlich}\} \equiv_1 \{x \mid \mathcal{G}_x \text{ total}\}$.

(ii) $K \leq_1 \{x \mid W_x \text{ endlich}\}$.

(iii) $\{x \mid W_x \text{ endlich}\} \not\leq_1 K$.

(iv) $\mathbb{R} \leq_1 \{x \mid W_x \text{ endlich}\}$.

(v) $\{x \mid W_x \text{ endlich}\} \not\leq_1 \mathbb{R}$.

(vi) $\{x \mid W_x = \emptyset\} <_1 \{x \mid W_x \text{ unendlich}\}$.

(vii) $\{x \mid W_x = W_n\} \equiv_1 \{x \mid \mathcal{G}_x \text{ total}\}$ (für festes n mit W_n unendlich).

Beweis: Da alle der positiven Aussagen für $\leq_m$ bewiesen wurden, genügt es zu zeigen, daß die entsprechenden Reduktionsfunktionen, sofern sie nicht bereits injektiv sind, sich leicht zu Injektionen machen lassen. Dazu bedienen wir uns eines Verfahrens (engl. "padding"), das auf M. Davis zurückgeht und im Fall von m-Reduktionen immer dann praktikabel ist, wenn - wie bei den meisten der zitierten Beispiele - die Menge, auf welche reduziert wird, von der Gestalt $\{x \mid P(\mathcal{G}_x)\}$ bzw. $\{x \mid P'(W_x)\}$ ist, wobei P und P' Eigenschaften von partiell rekursiven Funktionen bzw. rekursiv aufzählbaren Mengen sind. So gilt z.B. in Fall (i) nach §2.1, Satz 4, daß $\{x \mid W_x \text{ unendlich}\} \leq_m \{x \mid \mathcal{G}_x \text{ total}\}$, d.h. für alle x: $W_x \text{ unendlich} \Leftrightarrow \mathcal{G}_{f(x)} \text{ total}$ (für ein rekursives f). Falls (für beliebiges x) $f(x) \neq f^*(1)$ für $0 \leq i \leq x-1$, sei $f^*(x) := f(x)$. Falls dagegen $f(x) = f^*(1)$ für ein i ($0 \leq i \leq x-1$), so suche einen Index z von $\mathcal{G}_{f(i)}$ mit $z > \max\{f^*(0), \dots, f^*(x-1)\}$ und setze $f^*(x) := z$. Da nach einer Bemerkung in §1.1 (S.11) jede partiell rekursive Funktion abzählbar unendlich viele Indizes hat, ist so ein z immer (effektiv) auffindbar. Damit ist f^* injektiv, und es gilt für alle x: $W_x \text{ unendlich} \Leftrightarrow \mathcal{G}_{f^*(x)} \text{ total}$; i.e. $\{x \mid W_x \text{ unendlich}\} \leq_1 \{x \mid \mathcal{G}_x \text{ total}\}$ via f^* . - (Im Fall der m-Reduktion einer Menge A auf K gilt für alle x: $x \in A \Leftrightarrow \mathcal{G}_{f^*(x)}(f^*(x))$ definiert. Ist f' nicht injektiv, so betrachte die rekursive (!) Funktion g mit $\mathcal{G}_{g(x)}(y) = \mathcal{G}_x(x)$. Es gilt dann auch $A \leq_m K$ via $g \circ f' = f$. Definiert man f^* zu f wie oben, so gilt $A \leq_1 K$ via f^* . - Die Fälle (iii) und (v) folgen mit Satz 2. Q.e.d.

Satz 6: Sei D eine endliche Menge. Dann gilt:

- (i) $\{x \mid w_x = D\} \leq_1 K \times \bar{K}$;
- (ii) $K \times \bar{K} \not\leq_1 \{x \mid w_x = \emptyset\}$;
- (iii) $D \neq \emptyset \implies K \times \bar{K} \equiv_1 \{x \mid w_x = D\}$.

Beweis: (i) Definiere zu beliebigem x die partiell rekursive Funktion ψ_1 durch

$$\psi_1(y) := \begin{cases} 1, & \text{wenn } g_x(z) \text{ f\"ur alle } z \in D \text{ definiert;} \\ \text{undefiniert,} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann h"angt das Verhalten von ψ_1 nicht vom Argument y , sondern lediglich vom vorgegebenen x ab. Es gilt: $\text{domain } \psi_1 = \mathbb{N}$ oder $= \emptyset$, je nachdem, ob $g_x(z)$ f"ur alle $z \in D$ definiert ist oder nicht. Sei f_1 die nach dem s-m-n-Theorem existierende rekursive Funktion mit $\psi_1 = g_{f_1(x)}$. Dann gilt: $D \in W_x \iff g_{f_1(x)}$ total $\iff g_{f_1(x)}(f_1(x))$ definiert $\iff f_1(x) \in K$.

Definiere weiter zu beliebigem x die partiell rekursive Funktion ψ_2 durch

$$\psi_2(y) := \begin{cases} 1, & \text{wenn } g_x(z) \text{ f\"ur ein } z \in \bar{D} \text{ definiert;} \\ \text{undefiniert,} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann gilt f"ur die entsprechende rekursive Funktion f_2 mit $\psi_2 = g_{f_2(x)}$: $D \in W_x \iff g_x(z)$ f"ur kein $z \in \bar{D}$ definiert $\iff \psi_2(y)$ undefiniert f"ur alle $y \iff g_{f_2(x)}(f_2(x))$ undefiniert $\iff f_2(x) \in \bar{K}$.

Insgesamt folgt: $w_x = D \iff f_1(x) \in K \ \& \ f_2(x) \in \bar{K} \iff \langle f_1(x), f_2(x) \rangle \in K \times \bar{K}$. F"ur die - offenbar rekursive - Funktion h mit $h(x) := \langle f_1(x), f_2(x) \rangle$ gilt folglich: $\{x \mid w_x = D\} \leq_1 K \times \bar{K}$ via h .

(ii) Indirekt. Angenommen, $K \times \bar{K} \leq_1 \{x \mid w_x = \emptyset\}$. Dann folgt durch Komplementbildung $K \times \bar{K} \leq_1 \{x \mid w_x \neq \emptyset\}$. Da $\{x \mid w_x \neq \emptyset\}$ rekursiv aufz"ahlbar (vgl. §2.2, Satz 3), w"are dann nach Satz 2 $K \times \bar{K}$ rekursiv aufz"ahlbar, und damit auch $\bar{K}$: Widerspruch.

(iii) Sei $D \neq \emptyset$, $D = W_{x_0}$. Definiere zu beliebigem x die partiell rekursive Funktion ψ durch

$$\psi(y) := \begin{cases} g_{x_0}(y), & \text{wenn } \pi_1(x) \in K \text{ und } g_{\pi_2(x)}(\pi_2(x)) \text{ nach } y \text{ Schritten} \\ & \text{noch nicht berechnet ist;} \\ 1, & \text{wenn } \pi_1(x) \in K \text{ und } g_{\pi_2(x)}(\pi_2(x)) \text{ nach } y \text{ Schritten be-} \\ & \text{rechnet ist;} \\ \text{undefiniert,} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Sei f die nach dem s-m-n-Theorem existierende rekursive Funktion mit $\psi = g_{f(x)}$. Dann gilt f"ur alle x : $x \in K \times \bar{K} \iff w_{f(x)} = W_{x_0} (=D)$. Das hei"t: $K \times \bar{K} \leq_1 \{x \mid w_x = D\}$.

Beweis der "Aquivalenz": " $\implies$ ": $x \in K \times \bar{K} \implies \pi_1(x) \in K \ \& \ \pi_2(x) \in \bar{K} \implies \pi_1(x) \in K \ \& \ g_{\pi_2(x)}(\pi_2(x))$ nach y Schritten nicht berechnet (f"ur alle y) $\implies g_{f(x)}(y) = g_{x_0}(y)$ f"ur alle $y \implies g_{f(x)} = g_{x_0} \implies w_{f(x)} = W_{x_0}$.
" $\impliedby$ ": "ber die Kontraposition. G"elte $x \notin K \times \bar{K}$, d.h. (i) $\pi_1(x) \notin K$ oder (ii) $\pi_2(x) \in K$. In (i) gilt $\forall y [g_{f(x)}(y) \text{ undefiniert}]$, also $w_{f(x)} = \emptyset \neq D$. In (ii) sei o.E. $\pi_1(x) \in K$. Dann $\exists y \forall z > y [g_{\pi_2(x)}(\pi_2(x)) \text{ l"ost sich in weniger als } z \text{ Schritten berechnen}] \implies \forall z > y [z \in W_{f(x)}] \implies w_{f(x)} \text{ unendlich} \implies w_{f(x)} \neq D$. q.e.d.

Satz 7: $\{x \mid W_x \text{ unendlich}\} \leq_1 \{x \mid W_x \text{ rekursiv}\}$.

Beweis: (i) Es gilt: $\{x \mid W_x \text{ unendlich}\} \leq_1 \{x \mid W_x \text{ rekursiv}\}$. -

Definiere dazu für beliebiges x

$$\psi(y) := \begin{cases} 0, & \text{falls } \exists z [z \geq y \text{ \& } \mathcal{G}_x(z) \text{ definiert}] \text{ oder } \mathcal{G}_y(y) \text{ definiert;} \\ \text{undefiniert,} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Sei f nach dem s-m-n-Theorem gewählt mit $\psi = \mathcal{G}_{f(x)}$. Dann gilt für alle x :

$W_x \text{ unendlich} \iff W_{f(x)} \text{ rekursiv}$. Denn:

" $\implies$ ": Sei W_x unendlich. Dann gibt es zu jedem $y \in \mathbb{N}$ ein $z \in \mathbb{N}$ mit $z \geq y$ und $\mathcal{G}_x(z)$ definiert. Also ist $\psi(y)$ für alle $y \in \mathbb{N}$ definiert, d.h. $\text{domain } \psi = \mathbb{N}$, und damit $W_{f(x)}$ rekursiv.

" $\impliedby$ ": Sei $W_{f(x)}$ rekursiv; d.h. wir können für jedes $y \in \mathbb{N}$ entscheiden, ob $\psi(y)$ definiert ist oder nicht. Angenommen, W_x endlich. Dann gäbe es ein $y \in \mathbb{N}$ derart, daß für alle $z \in \mathbb{N}$ mit $z \geq y$ $\mathcal{G}_x(z)$ undefiniert wäre. D.h. K wäre endlich und somit rekursiv - Widerspruch. Folglich W_x unendlich. - Es gilt also $\{x \mid W_x \text{ unendlich}\} \leq_m \{x \mid W_x \text{ rekursiv}\}$ via f , und mittels des Verfahrens von Davis ist f wieder injektiv zu machen.

(ii) Es gilt: $\{x \mid W_x \text{ rekursiv}\} \not\leq_1 \{x \mid W_x \text{ unendlich}\}$. -

Dazu genügt es, eine Menge A anzugeben derart, daß zwar $A \leq_m \{x \mid W_x \text{ rekursiv}\}$, nicht hingegen $A \leq_m \{x \mid W_x \text{ unendlich}\}$. Wähle $A := \{x \mid W_x \text{ endlich}\}$. Dann gilt $A \not\leq_m \{x \mid W_x \text{ unendlich}\}$. Denn angenommen, $\{x \mid W_x \text{ endlich}\} \leq_m \{x \mid W_x \text{ unendlich}\}$. Dann folgt wegen $\{x \mid W_x \text{ endlich}\} \equiv_m \{x \mid \mathcal{G}_x \text{ nicht total}\}$ sowie $\{x \mid W_x \text{ unendlich}\} \equiv_m \{x \mid \mathcal{G}_x \text{ total}\}$ (vgl. §2.1, Satz 4) die Beziehung $\{x \mid \mathcal{G}_x \text{ nicht total}\} \leq_m \{x \mid \mathcal{G}_x \text{ total}\}$, und daraus durch Komplementbildung $\{x \mid \mathcal{G}_x \text{ total}\} \leq_m \{x \mid \mathcal{G}_x \text{ nicht total}\}$ - im Widerspruch zu §2.2, Satz 6.

Bleibt noch zu zeigen: $\{x \mid W_x \text{ endlich}\} \leq_m \{x \mid W_x \text{ rekursiv}\}$. Definiere dazu für beliebiges x

$$\psi(y) := \begin{cases} 0, & \text{falls } \mathcal{G}_y(y) \text{ definiert \& } \exists z [z \geq y \text{ \& } \mathcal{G}_x(z) \text{ definiert}]; \\ \text{undefiniert,} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Sei f rekursiv mit $\psi = \mathcal{G}_{f(x)}$. Dann gilt für alle x : $W_x \text{ endlich} \iff W_{f(x)} \text{ rekursiv}$:

" $\implies$ ": Sei W_x endlich. Dann gibt es ein $y \in \mathbb{N}$ derart, daß für alle $z \in \mathbb{N}$ mit $z \geq y$ der Ausdruck $\mathcal{G}_x(z)$ nicht mehr definiert ist. Dann ist $\text{domain } \psi$ endlich, also $W_{f(x)}$ rekursiv.

" $\impliedby$ ": Sei $W_{f(x)}$ rekursiv. Dann kann man für jedes $y \in \mathbb{N}$ entscheiden, ob $\psi(y)$ definiert ist oder nicht. Angenommen, W_x unendlich. Dann existiert zu jedem $y \in \mathbb{N}$ ein $z \in \mathbb{N}$ mit $z \geq y$ und $\mathcal{G}_x(z)$ definiert, d.h. die zweite Definitionsbedingung für ψ wäre redundant. Somit wäre $\text{domain } \psi = K$, also K rekursiv - Widerspruch.

Damit erhalten wir: $\{x \mid W_x \text{ endlich}\} \leq_m \{x \mid W_x \text{ rekursiv}\}$ via f . -

Nach einem grundlegenden Begriff der Theorie der rekursiven Funktionen heißen beliebige Mengen A und B **rekursiv isomorph** ("recursively isomorphic", engl.), wenn sie durch eine rekursive Bijektion (auf $\mathbb{N}$) aufeinander abgebildet werden können. Rekursive Bijektionen auf $\mathbb{N}$ heißen **rekursive Permutationen** ("recursive permutations"). Bezeichnen wir - mit Rogers(1967), S.50ff. - die Transformationsgruppe der rekursiven Permutationen mit G^* , so erhalten wir die folgende Definition der rekursiven Isomorphie: A ist rekursiv isomorph zu B: $\Leftrightarrow \exists f [f \in G^* \ \& \ f(A)=B]$. - Wir bringen als letzten Satz dieses Paragraphen das Resultat J.Myhill's, daß der Begriff der 1-Äquivalenz mit dem der rekursiven Isomorphie zusammenfällt. Somit ist die 1-Reduzierbarkeitsordnung eine Ordnung der "isomorphism types" (vgl. Rogers, a.a.O.). Da wir diesen Satz im folgenden häufig benutzen, wollen wir ihn ausführlich beweisen. Der Beweis erinnert an den des Satzes von Cantor-Schröder-Bernstein in der Theorie der Kardinalzahlen. Wir beginnen mit einer Hilfsdefinition, gefolgt von einem Lemma.

Seien A und B beliebige Mengen. Eine endliche Folge geordneter Paare $((x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n))$ ($n \in \mathbb{N}$) heißt eine **endliche Entsprechung zwischen A und B**, falls

- (i) für alle i, j mit $1 \leq i, j \leq n$ und $i \neq j$ gilt: $x_i \neq x_j$ und $y_i \neq y_j$;
- (ii) für alle i mit $1 \leq i \leq n$ gilt: $x_i \in A \Leftrightarrow y_i \in B$.

Lemma: Seien C und D Mengen mit $C \subseteq_1 D$. Dann gibt es ein effektives Verfahren derart, daß wir zu einer beliebig gegebenen endlichen Entsprechung $((x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n))$ zwischen C und D und beliebigem $x' \notin \{x_1, \dots, x_n\}$ ein y' finden können, so daß auch $((x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n), (x', y'))$ eine endliche Entsprechung zwischen C und D bildet.

Beweis: Gelte $C \subseteq_1 D$ via f . Berechne $f(x')$ und prüfe, ob $f(x') \in \{y_1, \dots, y_n\}$ oder nicht. Wenn $f(x') \neq y_i$ für alle i mit $1 \leq i \leq n$, so setze $y' := f(x')$. Wegen $x' \in C \Leftrightarrow f(x') \in D$ ist dann $((x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n), (x', y'))$ eine endliche Entsprechung zwischen C und D. - Gilt dagegen $f(x') = y_{i_1}$ für ein i_1 (mit $1 \leq i_1 \leq n$), so berechne $f(x_{i_1})$. Ist $f(x_{i_1}) \neq y_i$ für alle i ($1 \leq i \leq n$), dann setze $y' := f(x_{i_1})$. Wegen $x' \in C \Leftrightarrow f(x') \in D \Leftrightarrow y_{i_1} \in D \Leftrightarrow x_{i_1} \in C \Leftrightarrow f(x_{i_1}) \in D \Leftrightarrow y' \in D$ ist dann $((x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n), (x', y'))$ wieder eine endliche Entsprechung zwischen C und D.

Ist dagegen $f(x_{i_1}) = y_{i_2}$ mit $1 \leq i_2 \leq n$, so berechne $f(x_{i_2})$. Ist $f(x_{i_2}) \neq y_i$ für $1 \leq i \leq n$, so setz $y' := f(x_{i_2})$. Dann gilt: $x' \in C \Leftrightarrow f(x') \in D \Leftrightarrow y_{i_1} \in D \Leftrightarrow x_{i_1} \in C \Leftrightarrow f(x_{i_1}) \in D \Leftrightarrow y' \in D$, und folglich ist $((x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n), (x', y'))$ eine endliche Entsprechung zwischen C und D. Usw. - Da f injektiv ist, und die endliche Entsprechung eineindeutig, führt dieses Verfahren schließlich zu einem y' mit $y' \neq y_i$ für alle i mit $1 \leq i \leq n$, so daß $x' \in C \Leftrightarrow y' \in D$.

Satz 8 (Myhill): A ist rekursiv isomorph zu $B \iff A \equiv_1 B$.

Beweis: Sei A rekursiv isomorph zu B . Dann gibt es eine rekursive Permutation f mit $f(A) = B$, also $A \leq_1 B$ via f . Für die rekursive Permutation f^{-1} gilt $A = f^{-1}(B)$, d.h. $B \leq_1 A$ via f^{-1} . Insgesamt folgt $A \equiv_1 B$.

Gelte nun umgekehrt $A \equiv_1 B$, d.h. $A \leq_1 B$ und $B \leq_1 A$. Wir wenden das Lemma sowohl mit A und B , als auch mit B und A anstelle von C und D an und konstruieren so wie folgt einen Isomorphismus zwischen A und B .

Dazu geben wir ein effektives Verfahren zur Auflistung von Zahlenpaaren an. Die Konstruktion ist so eingerichtet, daß auf jeder Stufe der Auflistung die bereits in die Liste aufgenommenen geordneten Paare eine endliche Entsprechung bilden, wobei schließlich jede natürliche Zahl als erste, sowie jede natürliche Zahl auch als zweite Komponente eines geordneten Paares in der Liste erscheint. So bildet die Gesamtheit der aufgelisteten geordneten Paare eine rekursive Permutation, vermöge welcher A rekursiv isomorph zu B ist.

Das Verfahren verläuft wie folgt.

Sei $A \leq_1 B$ via g , und $B \leq_1 A$ via h .

Stufe 0: Wähle $(0, g(0))$ als erstes geordnetes Paar.

Es gilt: $0 \in A \iff g(0) \in B$. Also bildet das Paar $(0, g(0))$ eine endliche Entsprechung zwischen A und B .

Stufe 1: Prüfe, ob $g(0)=0$. Ist dies der Fall, gehe über zu Stufe 2. Falls nicht, so benütze das Lemma (mit A statt D , B statt C , h statt f , und 0 statt x'), um ein neues geordnetes Paar mit 0 als zweiter Komponente aufzulisten. (Da $(0, g(0))$ eine endliche Entsprechung zwischen A und B ist, ist $(g(0), 0)$ eine endliche Entsprechung zwischen B und A . Das Lemma führt nun zu einer endlichen Entsprechung $((g(0), 0), (0, y'))$ zwischen B und A . Also ist $((0, g(0)), (y', 0))$ eine endliche Entsprechung zwischen A und B .)

Stufe 2: Untersuche, ob 1 als erste Komponente eines bereits aufgelisteten geordneten Paares auftritt. Ist dies der Fall, gehe über zu Stufe 3. Andernfalls benütze das Lemma (mit A statt C , B statt D , g statt f), um ein weiteres geordnetes Paar mit 1 als erster Komponente aufzulisten.

Stufe 3: Untersuche, ob 1 als zweite Komponente eines bereits aufgelisteten geordneten Paares auftritt. Ist dies der Fall, gehe über zu Stufe 4. Andernfalls benütze das Lemma (mit A statt D , B statt C , h statt f), um ein weiteres geordnetes Paar mit 1 als zweiter Komponente aufzulisten.

.....

Stufe $2k$: Untersuche, ob k als erste Komponente eines bereits aufgelisteten geordneten Paares auftritt. Ist dies der Fall, gehe über zu Stufe

$2k+1$. Andernfalls benütze das Lemma (mit A statt C, B statt D, g statt f), um ein neues geordnetes Paar mit k als erster Komponente aufzulisten.

Stufe $2k+1$: Untersuche, ob k als zweite Komponente eines bereits aufgelisteten geordneten Paares auftritt. Ist dies der Fall, gehe über zu Stufe $2k+2$. Andernfalls benütze das Lemma (mit A statt D, B statt C, h statt f), um ein neues geordnetes Paar mit k als zweiter Komponente aufzulisten.

.....

Damit ist der Beweis vollständig.

Satz 8 liefert einen schnellen und bequemen Weg, rekursive Isomorphie nachzuweisen. So folgt zum Beispiel aus Satz 5 unmittelbar das folgende Korollar. Dabei führen wir gleichzeitig die Schreibweise " $A \equiv B$ " für " A ist rekursiv isomorph zu B " ein.

Korollar: (i) $\{x \mid W_x \text{ unendlich}\} \equiv \{x \mid \mathcal{G}_x \text{ total}\}$.

(ii) $\{x \mid W_x = W_n\} \equiv \{x \mid \mathcal{G}_x \text{ total}\}$ (für n mit W_n unendlich).

Beweis: Nach Satz 5 (i) und (vii) gilt $\{x \mid W_x \text{ unendlich}\} \equiv_1 \{x \mid \mathcal{G}_x \text{ total}\}$, sowie $\{x \mid W_x = W_n\} \equiv_1 \{x \mid \mathcal{G}_x \text{ total}\}$, und somit nach Satz 8 die Behauptung.

§3.2 Äquivalenz von m- und 1-Vollständigkeit

Analog dem Begriff der m-Vollständigkeit ist die 1-Vollständigkeit zu definieren: Eine rekursiv aufzählbare Menge heißt 1-vollständig, wenn jede rekursiv aufzählbare Menge auf sie 1-reduzierbar ist. Eine 1-vollständige Menge ist demnach vom höchsten 1-Grad unter den rekursiv aufzählbaren Graden in der 1-Reduzierbarkeitsordnung. Wir zeigen zuerst, daß die in §2.2, Satz 1 und Satz 2 als m-vollständig erwiesenen Mengen K_0 und K auch 1-vollständig sind, und benützen sodann dieses Resultat, um - mithilfe eines vorangehenden Lemmas - als wesentlichen Satz dieses Paragraphen die Äquivalenz der beiden Begriffe herzuleiten.

Definition: A heißt vollständig in bezug auf $\leq_1$ (bzw. 1-vollständig), wenn

(i) A rekursiv aufzählbar;

(ii) $\forall B [B \text{ rekursiv aufzählbar} \Rightarrow B \leq_1 A]$.

Satz 1: K_0 ist 1-vollständig.

Beweis: Nach §2.2, Satz 1 ist K_0 m-vollständig. Es genügt daher zu zeigen, daß die rekursive Funktion f , definiert durch $f(x) := \langle x, y_0 \rangle$, vermöge welcher wir dort eine beliebige rekursiv aufzählbare Menge mit dem Index y_0 auf K_0 m-reduzierten, injektiv ist. Seien dazu $x_1, x_2 \in \mathbb{N}$ mit $x_1 \neq x_2$. Dann gilt $\langle x_1, y_0 \rangle \neq \langle x_2, y_0 \rangle$, und folglich aufgrund der Bijektivität der Kodierungsfunktion auch $\langle x_1, y_0 \rangle \neq \langle x_2, y_0 \rangle$, d.h. $f(x_1) \neq f(x_2)$. Also ist f injektiv, und damit $w_{y_0} \leq_1 K_0$ via f .

Satz 2: K ist 1-vollständig.

Beweis: Da K rekursiv aufzählbar, genügt es zu zeigen, daß $K_0 \leq_1 K$; denn dann gilt aufgrund der 1-Vollständigkeit von K_0 für jedes rekursiv aufzählbare B $B \leq_1 K_0$ und folglich wegen der Transitivität von $\leq_1$ $B \leq_1 K$. Im Beweis von Satz 2, §2.2, zeigten wir $K_0 \leq_m K$ vermöge einer dort definierten Reduktionsfunktion f (S.44). Ist nun f nicht schon injektiv, so kann es mittels des im Beweis von Satz 5 des vorangehenden Paragraphen angegebenen Verfahrens von Davis so zu einem injektiven f^* abgeändert werden, daß $K_0 \leq_1 K$ via f^* .

Corollar: $K \equiv_1 K_0$.

Beweis: $K \leq_1 K_0$ nach Satz 1; $K_0 \leq_1 K$ nach Satz 2.

Wegen $A \leq_1 B \Rightarrow A \leq_m B$ impliziert die 1-Vollständigkeit die m-Vollständigkeit. Darüberhinaus zeigt der Beweis von Satz 2, daß wir das Verfahren von Davis ebenso gut dazu verwenden können, ausgehend von der m-Reduktion von K auf eine Menge B auch auf $K \leq_1 B$ zu schließen. Dies legt die Frage nahe, ob m-Vollständigkeit und 1-Vollständigkeit generell übereinstimmen. Wir beantworten sie im folgenden positiv. Dazu benötigen wir ein Lemma über endli-

che Teilmengen von Mengen, die in der m -Reduzierbarkeitsordnung oberhalb von K liegen. Wir treffen deshalb vorweg eine Definition über eine der möglichen Charakterisierungen endlicher Mengen. Wie wir wissen, lassen sich endliche Mengen nicht nur - als insbesondere rekursiv aufzählbare - durch ihre rekursiv aufzählbaren Indizes bestimmen, sondern ebenso - als insbesondere rekursive - durch Indizes für ihre (rekursiven) charakteristischen Funktionen. Im folgenden werden wir endliche Mengen noch auf eine dritte Art charakterisieren: einen Index, welcher unmittelbar ihre (endlich vielen) Elemente kodiert. Sei etwa A die nichtleere endliche Menge $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ ($k \in \mathbb{N}$), wobei $x_1 < x_2 < \dots < x_k$. Dann heißt die Zahl $x := 2^{x_1} + 2^{x_2} + \dots + 2^{x_k}$ (die x_i sind als Exponenten der 2 zu lesen!) der **kanonische Index** von A . Ist A leer, so sei ihr kanonischer Index gleich 0. Jede endliche Menge hat offenbar genau einen kanonischen Index, und umgekehrt ist jede natürliche Zahl der kanonische Index einer bestimmten endlichen Menge. Ebenso unproblematisch, wie aus den Elementen einer gegebenen endlichen Menge ihr kanonischer Index zu berechnen ist, kann man - aufgrund der eindeutigen Zerlegung in Zweierpotenzen - aus einer gegebenen Zahl die durch sie kanonisch indizierte endliche Menge ermitteln.

Definition: D_x sei die endliche Menge mit dem kanonischen Index x .

Beispiele: $D_0 = \emptyset$; $D_1 = \{0\}$; $D_{13} = \{0, 2, 3\}$.

Das folgende Lemma besagt somit, daß sich ausgehend vom kanonischen Index jeder nichtleeren endlichen Teilmenge einer Menge, welche auf K m -reduzierbar ist, effektiv eine Zahl ermitteln läßt, die in A , nicht aber in dieser Teilmenge liegt; Entsprechendes für das Komplement von A .

Lemma: Ist $K \leq_m A$, ^{und A rekursiv aufzählbar} dann existiert eine rekursive Funktion g derart, daß für alle x gilt: $D_x \neq \emptyset \ \& \ D_x \subset A \implies g(x) \in A \setminus D_x$; sowie:
 $D_x \neq \emptyset \ \& \ D_x \subset \bar{A} \implies g(x) \in \bar{A} \setminus D_x$.

Beweis: Sei A gegeben mit $K \leq_m A$ via f .

Wir zeigen zuerst, daß $f(K)$ unendlich ist. Angenommen nämlich, $f(K)$ sei endlich, d.h. $f(K)$ insbesondere rekursiv. Dann wäre, da $f^{-1}(f(K)) \leq_m f(K)$ via f , $f^{-1}(f(K)) = K$ rekursiv - Widerspruch.-

Wähle nun ein effektives Verfahren, K aufzulisten. Da f berechenbar, liefert dies auch ein effektives Verfahren, die - unendliche - Menge $f(K)$ aufzulisten (Ist etwa K -range g für die rekursive Funktion g , so folgt $f(K) = \text{range}(f \circ g)$ mit der rekursiven Funktion $f \circ g$.)

Betrachte nun für beliebiges x die Menge D_x .

Da A rekursiv aufzählbar, gibt es eine rekursive Funktion h derart, daß

$$h(x) = \begin{cases} f^{-1}(D_x), & \text{wenn } D_x \cap A = \emptyset; \\ \mathbb{N}, & \text{wenn } D_x \cap A \neq \emptyset. \end{cases}$$

(Sei nämlich x gegeben. Dann ermittle $D_x = \{x_1, \dots, x_n\}$ (n fest). Gehe die Aufzählung für A durch und vergleiche jedes der $a_0, a_1, a_2, \dots$ jeweils mit allen $x_1, \dots, x_n$. Solange kein a_i mit $a_i = x_j$ ($1 \leq j \leq n$) erscheint, zähle $W_{h(x)}$ als $f^{-1}(D_x)$ auf - indem man nacheinander die Funktionswerte $f(0), f(1), \dots$ berechnet, jeden davon mit $x_1, \dots, x_n$ vergleicht, und für jedes y mit $f(y) = x_k$ ($1 \leq k \leq n$) y in die Aufzählung übernimmt. Erscheint dagegen solch ein a_i , so zähle ganz $\mathbb{N}$ auf.)

Sei nun für beliebiges x die endliche Menge D_x gegeben. Definiere die Funktion g wie folgt:

$$g(x) := \begin{cases} f(h(x)), & \text{falls } f(h(x)) \notin D_x; \\ \text{das erste Element in der Liste von } f(K), & \text{das nicht in } D_x \text{ liegt,} \\ & \text{falls } f(h(x)) \in D_x. \end{cases}$$

Da $f \circ h$ rekursiv, und D_x endlich, ist mit endlich vielen Vergleichen entscheidbar, ob $f(h(x)) \in D_x$ oder nicht. Da außerdem $f(K)$ unendlich ist, und sich daher in der Liste dieser Menge immer ein Element finden läßt, das nicht in D_x liegt, ist $g(x)$ für alle x wohldefiniert und berechenbar. Wir zeigen, daß dieses rekursive g die gewünschten Eigenschaften hat.

Sei daher zuerst $D_x \neq \emptyset$ mit $D_x \subset A$. Dann ist $D_x \cap A \neq \emptyset$, also $W_{h(x)} = \mathbb{N}$, und folglich trivialerweise $h(x) \in W_{h(x)}$, das heißt per definitionem $h(x) \in K$. Dann ist wegen $K \leq_m A$ via f der Wert $f(h(x)) \in A$. Wenn nun $f(h(x)) \notin D_x$, so gilt $g(x) = f(h(x))$, und damit $g(x) \in A$. Dabei insbesondere $g(x) \notin D_x$. - Sei nun $D_x \neq \emptyset$ mit $D_x \subset \bar{A}$. Dann ist $D_x \cap A = \emptyset$, also $W_{h(x)} = f^{-1}(D_x)$, und folglich $h(x) \notin f^{-1}(D_x)$ (denn für $h(x) \in f^{-1}(D_x)$ wäre zum einen $f(h(x)) \in D_x$, zum andern $h(x) \in W_{h(x)}$, d.h. $h(x) \in K$, und folglich wegen $K \leq_m A$ via f $f(h(x)) \in A$; also insgesamt $f(h(x)) \in D_x \cap A$ - im Widerspruch zu $D_x \cap A = \emptyset$). Also $h(x) \notin W_{h(x)}$, d.h. $h(x) \notin K$, sowie $f(h(x)) \notin D_x$. Dann gilt $g(x) = f(h(x))$ und wegen $K \leq_m A$ via f $f(h(x)) \notin A$. Mithin $g(x) \in \bar{A}$. Da auch hier $g(x) \notin D_x$, ist die Behauptung des Lemmas vollständig erwiesen.

Satz 3: A m -vollständig $\iff A$ 1 -vollständig.

Beweis: Da die Implikation von rechts nach links klar ist, bleibt nur die eine Richtung zu zeigen. - Sei A m -vollständig. Dann gilt insbesondere $K \leq_m A$ vermöge einer Reduktionsfunktion f . Wir zeigen, daß $K \leq_1 A$, und folgern daraus die 1 -Vollständigkeit von A .

Sei dazu g die nach dem Lemma existierende rekursive Funktion. Wir ändern f dergestalt zu einem f' ab, daß $K \leq_1 A$ vermöge f' . Definiere f' rekursiv wie folgt:

$n=0$: Setze $f'(0) := f(0)$. Dann gilt: $0 \in K \iff f(0) \in A \iff f'(0) \in A$.

$n=1$: Prüfe, ob $f(1) \in \{f'(0)\}$, d.h. $f(1) = f'(0)$.

1. Fall: Wenn $f(1) \neq f'(0)$, setze $f'(1) = f(1)$.

Dann gilt: $1 \in K \iff f(1) \in A \iff f'(1) \in A$.

2. Fall: Wenn $f(1) = f'(0)$, so bilde $D_2 f'(0) = \{f'(0)\}$, $D_2 f'(0) \neq \emptyset$ (wobei

$2^{f'(C)}$ als kanonischer Index der - endlichen - Menge $\{f'(0)\}$ zu lesen ist!).
 Nach dem Lemma gilt: $D_2 f'(0) \subset A \implies f'(0) \in A \implies g(2^{f'(0)}) \in A \ \& \ g(2^{f'(0)}) \not\subset D_2 f'(0)$ (d.h. $g(2^{f'(0)}) \not\subset f'(0)$); bzw. $D_2 f'(0) \subset \bar{A} \implies f'(0) \in \bar{A} \implies g(2^{f'(0)}) \in \bar{A} \ \& \ g(2^{f'(0)}) \not\subset f'(0)$. Setze also $f'(1) := g(2^{f'(0)})$. Dann gilt: $1 \in K \iff f(1) \in A \iff f'(0) \in A \iff \{f'(0)\} \subset A \iff g(2^{f'(0)}) = f'(1) \in A$.
 $n=2$: Prüfe nun, ob $f(2) \in \{f'(0), f'(1)\}$.

1. Fall: Wenn $f(2) \notin \{f'(0), f'(1)\}$, setze $f'(2) := f(2)$.

Dann gilt: $2 \in K \iff f(2) \in A \iff f'(2) \in A$.

2. Fall: $f(2) \in \{f'(0), f'(1)\}$, o.B.d.A. $f(2) = f'(0)$.

Dann bilde $D_2 f'(0) = \{f'(0)\}$, $D_2 f'(0) \neq \emptyset$. Dann gilt für $g(2^{f'(0)})$:

$D_2 f'(0) \subset A \implies f'(0) \in A \implies g(2^{f'(0)}) \in A \ \& \ g(2^{f'(0)}) \not\subset f'(0)$; bzw.

$D_2 f'(0) \subset \bar{A} \implies g(2^{f'(0)}) \in \bar{A} \ \& \ g(2^{f'(0)}) \not\subset f'(0)$. Dennoch dürfen

wir diesmal nicht ohne weiteres $f'(2) = g(2^{f'(0)})$ setzen, da

$g(2^{f'(0)}) = f'(1)$ sein könnte. Prüfe deshalb auch noch, ob dies

der Fall ist. Wenn nicht, so setze $f'(2) := g(2^{f'(0)})$. Dann gilt:

$2 \in K \iff f(2) \in A \iff f'(0) \in A \iff g(2^{f'(0)}) \in A \ \& \ 2^{f'(0)} \not\subset f'(0) \iff$

$f'(2) \in A$. - Falls dagegen $g(2^{f'(0)}) = f'(1)$, so betrachte $D_2 f'(0) +_2 f'(1) =$

$= \{f'(0), f'(1)\} \neq \emptyset$, berechne $g(2^{f'(0) +_2 f'(1)})$ und setze $f'(2) :=$

$= g(2^{f'(0) +_2 f'(1)})$. Dann gilt: $2 \in K \iff f(2) \in A \iff f'(0) \in A \iff$

$g(2^{f'(0)}) \in A \ \& \ f'(0) \not\subset g(2^{f'(0)}) = f'(1) \iff f'(1) \in A \iff f'(0) \in A \ \&$

$\& \ f'(1) \in A \iff D_2 f'(0) +_2 f'(1) = \{f'(0), f'(1)\} \subset A \iff g(2^{f'(0) +_2 f'(1)}) =$

$= f'(2) \in A \ (\& \ f'(0) \not\subset g(2^{f'(0) +_2 f'(1)}) \not\subset f'(1)) \iff f'(2) \in A$.

Für den Schritt von n nach $n+1$ lautet das Verfahren allgemein:

Prüfe, ob $f(n+1) \in \{f'(0), \dots, f'(n)\}$.

1. Fall: $f(n+1) \notin \{f'(0), \dots, f'(n)\}$. Setze $f'(n+1) := f(n+1)$.

Dann gilt: $n+1 \in K \iff f(n+1) \in A \iff f'(n+1) \in A$.

2. Fall: $f(n+1) \in \{f'(0), \dots, f'(n)\}$, etwa $f(n+1) = f'(m_0)$ mit $m_0 \in \{0, \dots, n\}$.

Betrachte $D_{x_0} := D_2 f'(m_0) = \{f'(m_0)\}$ und berechne $g(x_0)$. Dann ist

$g(x_0) \not\subset f'(m_0)$. Prüfe nun, ob $g(x_0) \in \{f'(0), \dots, f'(n)\} \setminus \{f'(m_0)\}$.

Wenn nicht, setze $f'(n+1) := g(x_0)$. Dann gilt: $n+1 \in K \iff f(n+1) \in A$

$\iff f'(m_0) \in A \iff D_{x_0} \subset A \iff g(x_0) \in A \setminus \{f'(m_0)\} \iff f'(n+1) \in A$. -

Wenn ja, etwa $g(x_0) = f'(m_1)$ mit $m_1 \in \{0, \dots, n\} \setminus \{m_0\}$, so betrachte

$D_{x_1} := D_2 f'(m_0) +_2 f'(m_1) = \{f'(m_0), f'(m_1)\}$ und berechne $g(x_1)$.

Prüfe, ob $g(x_1) \in \{f'(0), \dots, f'(n)\} \setminus D_{x_1}$. Wenn nicht, setze

$f'(n+1) := g(x_1)$. Dann gilt: $n+1 \in K \iff f(n+1) \in A \iff f'(m_0) \in A \iff$

$g(x_0) = f'(m_1) \in A \setminus \{f'(m_0)\} \iff g(x_1) \in A \setminus \{f'(m_0), f'(m_1)\} \iff f'(n+1) \in A$.

Falls dagegen $g(x_1) \in \{f'(0), \dots, f'(n)\} \setminus D_{x_1}$, etwa $g(x_1) = f'(m_2)$

mit $m_2 \in \{0, \dots, n\} \setminus \{m_0, m_1\}$, so bilde $D_{x_2} := \{f'(m_0), f'(m_1), f'(m_2)\}$

und berechne $g(x_2) \in A \setminus D_{x_2}$. Durch dieses Verfahren gelangen wir

nach spätestens n Schritten zu einem $g(x_m)$ mit $g(x_m) \not\subset \{f'(0), \dots, f'(n)\}$

Setze dann $f'(n+1) := g(x_m)$. Dann gilt: $n+1 \in K \iff f(n+1) \in A \iff$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow f'(m_0) \in A \Leftrightarrow g(x_0) \in A \setminus \{f'(m_0)\} \Leftrightarrow g(x_1) \in A \setminus \{f'(m_0), f'(m_1)\} \\ &\Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow g(x_m) \in A \setminus \{f'(m_0), \dots, f'(m)\} \Leftrightarrow f'(n+1) \in A. \end{aligned}$$

Es gilt also in jedem Fall: $n+1 \in K \Leftrightarrow f'(n+1) \in A$. Da f' injektiv, ist $K \leq_1 A$ via f' .

Da K 1-vollständig, gilt für alle rekursiv aufzählbaren Mengen B , daß $B \leq_1 K$, und folglich vermöge der Transitivität von $\leq_1$, daß $B \leq_1 A$. Da A nach Voraussetzung rekursiv aufzählbar, ist A 1-vollständig. Q.e.d.

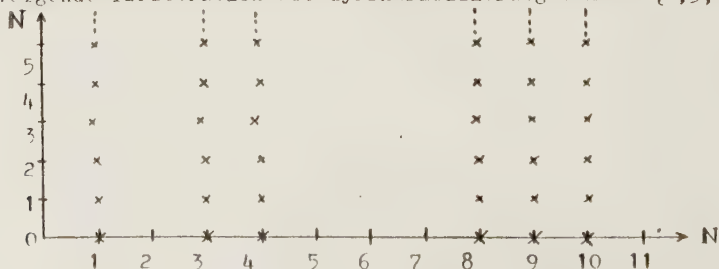
Abschließend ist zu bemerken, daß die Menge K auf jede der nicht-rekursiven, rekursiv aufzählbaren Mengen, welche wir bisher betrachteten, m -reduzierbar war. Nun gilt für m -vollständige Mengen A, B , daß sowohl $A \leq_m B$ als auch $B \leq_m A$, also nach dem vorstehenden Satz $A \leq_1 B$ sowie $B \leq_1 A$ und damit $A \equiv_1 B$; nach dem Satz von Myhill (§3.1, Satz 8) folgt $A \equiv B$. Da K m - bzw. 1-vollständig ist, ergibt sich, daß jede bislang untersuchte nicht-rekursive, rekursiv aufzählbare Menge rekursiv isomorph zu K ist. Da weiter nach §3.2 (S.55) m -Vollständigkeit mit Kreativität koinzidiert, sind die Begriffe der Kreativität, m -Vollständigkeit, 1-Vollständigkeit sowie der Isomorphie zu K äquivalent und bilden einen einzigen Isomorphismus-Typ. Jedes unserer Beispiele von nicht-rekursiven, rekursiv aufzählbaren Mengen besaß diese Eigenschaften. Wir untersuchen im folgenden, ob dies stets gilt, oder ob die Eigenschaft, nicht-rekursiv und rekursiv aufzählbar zu sein, noch umfassender ist. Wie in §3.2 angedeutet (vgl. S.54f.), ist Letzteres der Fall. Dies wollen wir im übernächsten Paragraphen zeigen; zuvor jedoch einen weiteren für den Vergleich von $\leq_m$ und $\leq_1$ maßgeblichen Begriff diskutieren.

§3.3 Zylinder

Da $A \equiv_1 B \implies A \equiv_m B$ für alle A und B , besteht jeder m -Grad aus einem oder mehreren 1 -Graden (d.h. Isomorphismustypen). Wie kann man die Struktur eines m -Grades in Abhängigkeit von den in ihm enthaltenen 1 -Graden noch genauer bestimmen? Die folgende Definition, die auf Myhill zurückgeht, stellt einen dafür wesentlichen Begriff bereit. Myhill geht aus von einer rekursiven Funktion j , welche $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ bijektiv auf $\mathbb{N}$ abbildet, betrachtet zu einer beliebigen Menge A die Menge $A \times \mathbb{N}$ aller Zahlenpaare, deren erste Komponenten in A liegen, und bezeichnet das Bild von $A \times \mathbb{N}$ unter j - also die Menge $j(A \times \mathbb{N})$ - als $Cy(A)$. Er nennt eine Menge M einen **Zylinder** ("cylinder", im Original), falls M rekursiv isomorph zu $Cy(A)$ für irgendeine nichtleere rekursiv aufzählbare Menge A (vgl. Myhill(1959), a.a.O. S.213). Da solch ein j in unserer Terminologie der Kodierungsfunktion τ entspricht, und folglich $j(A \times \mathbb{N})$ der Menge $A \times \mathbb{N} = \tau(A \times \mathbb{N})$, können wir $Cy(A) = A \times \mathbb{N}$ die "Zylindrifizierung" von A nennen. Da, falls A rekursiv aufzählbar, dies auch für $A \times \mathbb{N}$ gilt, sind - aufgrund der rekursiven Invarianz des Begriffs der rekursiven Aufzählbarkeit (vgl. dazu Rogers(1967), S.52f.) - nach der Definition Myhills alle Zylinder rekursiv aufzählbar. Wie Young, die einschlägigen Resultate Myhills zitierend, bemerkt, vollzieht Rogers(1967) die Beobachtung, daß diese für alle Mengen gelten. Wir folgen daher - mit Young(1966), a.a.O. S.71 - Rogers' allgemeineren Definition.

Definition: Eine Menge A heißt Zylinder, wenn $A \equiv B \times \mathbb{N}$ für eine Menge B . $B \times \mathbb{N}$ heißt die Zylindrifizierung von B .

Die geometrisch-anschauliche Bedeutung der Begriffe liegt auf der Hand. Denken wir uns ein Diagramm mit jeweils der Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen als Rechtswert- und Hochwertachse, auf dessen Abszisse die Elemente von B angetragen sind, so ergibt sich die Zylindrifizierung von B anschaulich als die Menge der Punkte, deren erste Komponenten die Elemente von B , und deren zweite Komponenten alle Zahlen der Ordinate durchlaufen. So veranschaulicht die folgende Illustration die Zylindrifizierung von $B = \{1, 3, 4, 8, 9, 10\}$:



"Veranschaulicht" eigentlich in Anführungszeichen, da wir ja nicht genau die Paarmenge $B \times \mathbb{N}$, sondern bereits deren Kodierung $B \times \mathbb{N}$ meinen. Denken wir uns die Menge B als kreisförmige Fläche in der Ebene, und vertikal auf dieser $\mathbb{N}$

als Ordinate errichtet, so kommen wir der Anschauung eines "Zylinders" noch näher.

A ist somit ein Zylinder, wenn A rekursiv isomorph zur Zylindrifizierung einer Menge B ist. Dabei gebrauchen wir " $\equiv$ " anstelle von "=", um den Begriff des Zylinders "rekursiv invariant" (vgl. S.70) werden zu lassen; das heißt, um zu garantieren, daß, wenn A ein Zylinder, und $A \equiv C$ für eine Menge C, auch C ein Zylinder ist. Dies ist dann, wie man leicht sieht, der Fall. Sei etwa $A \equiv B \times \mathbb{N}$ vermöge der rekursiven Permutation f, also $f(A) = B \times \mathbb{N}$, sowie $A \equiv C$ vermöge $g \in G^*$, also $g(A) = C$ und folglich $A = g^{-1}(C)$. Dann ist auch $h := f \circ g^{-1}$ eine rekursive Permutation, und es gilt: $h(C) = f(g^{-1}(C)) = f(A) = B \times \mathbb{N}$, d.h. $C \equiv B \times \mathbb{N}$ vermöge h, und daher ist C ein Zylinder.-

Triviale Beispiele für Zylinder sind die Mengen $\emptyset$ und $\mathbb{N}$. Denn es ist $\emptyset \equiv \emptyset \times \mathbb{N}$ und $\mathbb{N} \equiv \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Doch sind - da, falls A Zylinder, auch $\bar{A}$ Zylinder - keine anderen endlichen oder ko-endlichen Mengen (vgl. dazu die terminologische Vereinbarung in §2.3, S.55) Zylinder. Als elementare Übung beweisen wir den Satz, daß, wenn entweder A oder B ein Zylinder ist, dann auch $A \times B$.

Satz 1: A oder B Zylinder $\implies A \times B$ Zylinder.

Beweis: Sei o.B.d.A. A Zylinder, $A \equiv C \times \mathbb{N}$. Dann gilt $A \times B \equiv (C \times \mathbb{N}) \times B$. Da " $\times$ " assoziativ, gilt $(C \times \mathbb{N}) \times B \equiv C \times (\mathbb{N} \times B)$, da " $\times$ " kommutativ, $C \times (\mathbb{N} \times B) \equiv C \times (B \times \mathbb{N})$, und wieder aufgrund der Assoziativität $C \times (B \times \mathbb{N}) \equiv (C \times B) \times \mathbb{N}$. Da " $\equiv$ " transitiv, folgt $A \times B \equiv (C \times B) \times \mathbb{N}$, also $A \times B$ Zylinder.-

Bevor wir noch weitere Beispiele von Zylindern geben (Satz 5, Satz 6), verschaffen wir uns durch die Untersuchung ihrer Rolle bei $\leq_m$ und $\leq_1$ wichtige Hilfsmittel nicht zuletzt für deren Behandlung. So besagt der folgende elementare, aber nützliche Satz zum einen, daß jede Menge auf ihre eigene Zylindrifizierung 1-reduzierbar ist, und zum andern, daß jede Zylindrifizierung einer Menge immer m-reduzierbar auf die Menge selbst ist. Demzufolge liegen eine Menge und ihre Zylindrifizierung in ein- und demselben m-Grad.

Satz 2: (a) $A \leq_1 A \times \mathbb{N}$ für alle A.

(b) $A \times \mathbb{N} \leq_m A$ (und daher $A \equiv_m A \times \mathbb{N}$) für alle A.

Beweis: Sei A beliebig.

(a) Definiere für festes $n \in \mathbb{N}$ $f(x) := \langle x, n \rangle$ für alle x. Dann ist f offenbar rekursiv und injektiv, und für alle x gilt: $x \in A \iff \langle x, n \rangle \in A \times \mathbb{N} \iff \langle x, n \rangle \in A \times \mathbb{N} \iff f(x) \in A \times \mathbb{N}$; also $A \leq_1 A \times \mathbb{N}$ via f.

(b) Definiere für alle x $f(x) := \pi_1(x)$. Dann ist f rekursiv, und es gilt für alle x: $x \in A \times \mathbb{N} \iff \pi_1(x) \in A \iff f(x) \in A$; also $A \times \mathbb{N} \leq_m A$ via f. Da nach (a) auch $A \leq_m A \times \mathbb{N}$, folgt $A \equiv_m A \times \mathbb{N}$.

Da zwei verschiedene Zahlen zwei Zahlenpaare mit gleicher erster Komponente kodieren können (wobei dann selbstverständlich die zweiten Komponenten

verschieden sein müssen), ist f in (b) des Beweises nicht injektiv, also nicht $A \times \mathbb{N} \leq_1 A$ via f . Daß $A \times \mathbb{N} \leq_1 A$ nicht allgemein gelten kann, erkennt man sofort an dem Fall, daß A nichtleer und endlich ist. Denn dann ist $A \times \mathbb{N}$ eine unendliche Menge und als solche niemals auf eine endliche 1-reduzierbar. Als Korollar zum übernächsten Satz wird sich ergeben, daß $A \times \mathbb{N}$ genau dann 1-reduzierbar auf A ist (und folglich mit A in demselben 1-Grad liegt), wenn A selbst ebenfalls ein Zylinder ist. Zunächst aber der Satz, welcher das entscheidende Kriterium zur Beantwortung unserer eingangs gestellten Frage liefert.

Satz 3: $\forall B [B \leq_m A \implies B \leq_1 A] \iff A \text{ ist Zylinder.}$

Beweis: Gelte zuerst $\forall B [B \leq_m A \implies B \leq_1 A]$. Wir zeigen, daß $A \equiv A \times \mathbb{N}$, und folglich A Zylinder.

Nach Satz 2 (b) gilt $A \times \mathbb{N} \leq_m A$ und damit nach Voraussetzung $A \times \mathbb{N} \leq_1 A$. Da auch $A \leq_1 A \times \mathbb{N}$ nach Satz 2 (a), gilt $A \equiv_1 A \times \mathbb{N}$, und damit nach dem Satz von Myhill $A \equiv A \times \mathbb{N}$.

Sei nun umgekehrt A ein Zylinder, $A \equiv C \times \mathbb{N}$, $f(A) = C \times \mathbb{N}$ mit $f \in G^*$ (vgl. S.62). Gelte außerdem $B \leq_m A$ via g . Da $A \leq_1 C \times \mathbb{N}$ via f , sowie $C \times \mathbb{N} \leq_m C$ via π_1 , folgt $B \leq_m C$ via $h := \pi_1 \circ f \circ g$. Definiere $k(x) = \langle h(x), x \rangle$ für alle x . Dann ist k rekursiv und injektiv, und es gilt für alle x : $x \in B \iff h(x) \in C \iff \langle h(x), x \rangle = k(x) \in C \times \mathbb{N}$; also $B \leq_1 C \times \mathbb{N}$ via k . Dann ist auch $l := f^{-1} \cdot k$ rekursiv und injektiv, wobei für alle x : $x \in B \iff k(x) \in C \times \mathbb{N} \iff f^{-1}(k(x)) \in A$ also $B \leq_1 A$ via l . Q.e.d.

Nach Satz 3 sind die Zylinder also genau die Mengen, auf welche eine Menge genau dann 1-reduzierbar ist, wenn sie m -reduzierbar auf sie ist. Aus Satz 2 zusammen mit Satz 3 folgt, daß jeder m -Grad einen maximalen 1-Grad enthält, der durch Zylindrifizierung einer beliebigen Menge des m -Grades entsteht. Sei nämlich $d_m(A)$ der m -Grad einer beliebigen Menge A , und B ein Element von $d_m(A)$. Da $B \equiv_m B \times \mathbb{N}$, liegt auch $B \times \mathbb{N}$ in $d_m(A)$, und wegen $C \leq_m B \leq_m B \times \mathbb{N}$, also $C \leq_m B \times \mathbb{N}$, gilt nach Satz 3 $C \leq_1 B \times \mathbb{N}$ für jedes C aus $d_m(A)$.

Darüberhinaus spiegelt sich, wie der folgende Satz zeigt, die Struktur der m -Reduzierbarkeitsordnung auf natürliche Weise in der 1-Ordnung.

Satz 4: $A \leq_m B \iff A \times \mathbb{N} \leq_1 B \times \mathbb{N}$ (für alle A).

Beweis: Gelte $A \leq_m B$. Da nach Satz 2 (b) $A \times \mathbb{N} \leq_m A$, und nach Satz 2 (a)

$B \leq_1 B \times \mathbb{N}$ gilt, folgt mit der Transitivität von $\leq_m$, daß $A \times \mathbb{N} \leq_m B \times \mathbb{N}$.

Da $B \times \mathbb{N}$ Zylinder, gilt dann nach Satz 3 $A \times \mathbb{N} \leq_1 B \times \mathbb{N}$.

Gelte umgekehrt $A \times \mathbb{N} \leq_1 B \times \mathbb{N}$. Dann folgt aus $A \leq_1 A \times \mathbb{N} \leq_1 B \times \mathbb{N} \leq_m B$ die Beziehung $A \leq_m B$.

Eine Menge ist demnach auf eine andere genau dann m -reduzierbar, wenn ihre Zylindrifizierung auf die Zylindrifizierung der anderen 1-reduzierbar ist. Somit erhalten wir einen kanonischen Homomorphismus von der m -Ordnung in die 1-Ordnung, wenn wir jedem m -Grad $d_m(A)$ einer Menge A den 1-Grad ihrer Zylindri-

fizierung, $d_1(A \times \mathbb{N})$, zuordnen. Bezeichne $\mathfrak{A}$ diese Zuordnung. Dann gilt: $A \equiv_m B \iff A \times \mathbb{N} \equiv_1 B \times \mathbb{N}$; d.h. $d_m(A) = d_m(B) \iff d_1(\mathfrak{A}(A)) = d_1(\mathfrak{A}(B))$.

Korollar: Es sind äquivalent: (i) A Zylinder;
(ii) $A \times \mathbb{N} \leq_1 A$;
(iii) $A \equiv A \times \mathbb{N}$.

Beweis: "(i) $\implies$ (ii)": Da $A \times \mathbb{N} \leq_m A$, folgt, wenn A Zylinder, nach Satz 3, daß $A \times \mathbb{N} \leq_1 A$.

"(ii) $\implies$ (iii)": Da $A \leq_1 A \times \mathbb{N}$, folgt mit der Voraussetzung, daß $A \equiv_1 A \times \mathbb{N}$, also nach Myhill $A \equiv A \times \mathbb{N}$.

"(iii) $\implies$ (i)": Da nach Voraussetzung $A \equiv A \times \mathbb{N}$, ist A per definitionem ein Zylinder.

Wir benutzen das Korollar zum Beweis des folgenden Satzes.

Satz 5: A und B Zylinder $\implies$ $A \text{ Jung } B$ Zylinder (zur Definition von $A \text{ Jung } B$ vgl. §2.1, S.42).

Beweis: Seien A und B Zylinder. Nach dem Korollar gibt es rekursive und injektive Funktionen f_1 und f_2 derart, daß $A \times \mathbb{N} \leq_1 A$ via f_1 und $B \times \mathbb{N} \leq_1 B$ via f_2 . Wir zeigen, daß $(A \text{ Jung } B) \times \mathbb{N} \leq_1 A \text{ Jung } B$; woraus aufgrund des Korollars folgt, daß $A \text{ Jung } B$ Zylinder. Definiere dazu die offenbar rekursive Funktion g durch

$$g(x) := \begin{cases} 2f_1(\langle \frac{\pi_1(x)}{2}, \pi_2(x) \rangle), & \text{falls } \pi_1(x) \text{ gerade;} \\ 2f_2(\langle \frac{\pi_1(x)-1}{2}, \pi_2(x) \rangle) + 1, & \text{falls } \pi_1(x) \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Dann gilt für alle x: $x \in (A \text{ Jung } B) \times \mathbb{N} \iff \pi_1(x) \in A \text{ Jung } B \iff (\pi_1(x) \text{ gerade \& } \frac{\pi_1(x)}{2} \in A) \text{ oder } (\pi_1(x) \text{ ungerade \& } \frac{\pi_1(x)-1}{2} \in B) \iff (g(x) = 2f_1(\langle \frac{\pi_1(x)}{2}, \pi_2(x) \rangle) \in A) \text{ oder } (g(x) = 2f_2(\langle \frac{\pi_1(x)-1}{2}, \pi_2(x) \rangle) + 1 \in B) \iff$

$$\iff (g(x) = 2f_1(\langle \frac{\pi_1(x)}{2}, \pi_2(x) \rangle) \in A) \text{ oder } (g(x) = 2f_2(\langle \frac{\pi_1(x)-1}{2}, \pi_2(x) \rangle) + 1 \in B) \iff$$

$$\iff (g(x) \text{ ist gerade \& } \frac{g(x)}{2} \in A) \text{ oder } (g(x) \text{ ist ungerade \& } \frac{g(x)-1}{2} \in B) \iff$$

$$\iff g(x) \in A \text{ Jung } B. \text{ Also gilt, da g injektiv, } (A \text{ Jung } B) \times \mathbb{N} \leq_1 A \text{ Jung } B \text{ via g. Q.e.d.}$$

Dagegen folgt, wie das folgende Beispiel zeigt, daraus, daß $A \text{ Jung } B$ ein Zylinder ist, nicht notwendigerweise, daß A oder B ein Zylinder sein muß. Wähle etwa $A := \{0\}$ und $B := \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Dann sind A und B, da endlich und ko-endlich, keine Zylinder, während $A \text{ Jung } B = \{0, 3, 5, 7, \dots\}$ ein Zylinder ist. Denn da $A \text{ Jung } B$ rekursiv, gilt für jedes C mit $C \leq_m A \text{ Jung } B$, daß C rekursiv. Weiter gilt wegen $|A \text{ Jung } B| = |\overline{A \text{ Jung } B}| = \infty$, daß $A \text{ Jung } B \in [\infty]$ (in der Terminologie von §3.1, Satz 3). Also $C \leq_1 A \text{ Jung } B$ (nach demselben Satz). Nach Satz 3 ist dann $A \text{ Jung } B$ ein Zylinder.-

Als Beispiel für die Anwendung von Zylindern wollen wir zeigen, daß die Mengen $K \times \bar{K}$ und $K \text{Jung} \bar{K}$, obgleich dem intuitiven Verständnis von Reduzierbarkeit nach äquivalent (vgl. dazu die ausführliche Diskussion in §4.1), nicht m -äquivalent sind – woran aufs neue erkennbar wird, daß diese Präzisierung noch bei weitem zu eng gewählt ist. Dazu benötigen wir das folgende Lemma.

Lemma: $K \times \bar{K}$ und $K \text{Jung} \bar{K}$ sind Zylinder.

Beweis: Sei B beliebig mit $B \leq_m K$. Dann ist B rekursiv aufzählbar. Da K 1-vollständig ist, folgt, daß $B \leq_1 K$. Also ist nach Satz 3 K ein Zylinder, und somit auch $\bar{K}$. Dann ist nach Satz 1 $K \times \bar{K}$ ein Zylinder, und nach Satz 5 auch $K \text{Jung} \bar{K}$.

Satz 6: (i) $K \text{Jung} \bar{K} \leq_1 K \times \bar{K}$;
(ii) $K \times \bar{K} \not\leq_m K \text{Jung} \bar{K}$.

Beweis: (i) Seien $z_0 \in \bar{K}$, $z_1 \in K$ fest gegeben. Dann definiere für alle x :

$$f(x) := \begin{cases} \langle \frac{x}{2}, z_0 \rangle, & \text{falls } x \text{ gerade;} \\ \langle z_1, \frac{x-1}{2} \rangle, & \text{falls } x \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Dann ist f rekursiv und injektiv, und für alle x gilt: $x \in K \text{Jung} \bar{K} \iff$

$$\iff (x \text{ gerade} \ \& \ \frac{x}{2} \in K) \text{ oder } (x \text{ ungerade} \ \& \ \frac{x-1}{2} \in \bar{K}) \iff$$

$$\iff (f(x) = \langle \frac{x}{2}, z_0 \rangle \text{ mit } \frac{x}{2} \in K) \text{ oder } (f(x) = \langle z_1, \frac{x-1}{2} \rangle \text{ mit } \frac{x-1}{2} \in \bar{K}) \iff f(x) \in K \times \bar{K}.$$

Also $K \text{Jung} \bar{K} \leq_1 K \times \bar{K}$ via f .

(ii) Indirekt. Angenommen, $K \times \bar{K} \leq_m K \text{Jung} \bar{K}$. Dann gilt nach (i):

$K \times \bar{K} \equiv_m K \text{Jung} \bar{K}$. Also mit Lemma und Satz 3: $K \times \bar{K} \equiv_1 K \text{Jung} \bar{K}$. Und nach Myhill: $K \times \bar{K} \equiv K \text{Jung} \bar{K}$. Das heißt, es gibt eine rekursive Permutation f mit $f(K \times \bar{K}) = K \text{Jung} \bar{K}$. Definiere nun $\tilde{K} := \{2x \mid x \in K\}$, sowie $\tilde{\bar{K}} := \{2x+1 \mid x \in \bar{K}\}$; somit bilden $\tilde{K}$ und $\tilde{\bar{K}}$ eine Zerlegung (i.e. eine disjunkte Vereinigung) von $K \text{Jung} \bar{K}$.

Nun betrachte $\pi_2(f^{-1}(\tilde{K}))$, d.h. die Menge aller zweiten Komponenten jener Zahlenpaare, deren Kodierungen durch f nach $\tilde{K}$ abgebildet werden. Da $f^{-1}(\tilde{K}) \subset K \times \bar{K}$, gilt $\pi_2(f^{-1}(\tilde{K})) \subset \bar{K}$. Dies aber führen wir anhand der folgenden Fallunterscheidung zum Widerspruch:

(1) $\pi_2(f^{-1}(\tilde{K})) = \bar{K}$. Dann folgt, da $\tilde{K}$ und damit $f^{-1}(\tilde{K})$ rekursiv aufzählbar, daß auch $\pi_2(f^{-1}(\tilde{K}))$, i.e. $\bar{K}$ rekursiv aufzählbar – Widerspruch.

(2) $\pi_2(f^{-1}(\tilde{K})) \not\equiv \bar{K}$. Dann gibt es ein $x_0 \in \bar{K}$ mit $x_0 \notin \pi_2(f^{-1}(\tilde{K}))$, d.h. $x_0 \in \bar{K}$, und es existiert kein $y_0 \in f^{-1}(\tilde{K})$ mit $x_0 = \pi_2(y_0)$. Also $x_0 \in \bar{K}$, und für alle $y \in K$ ist $\langle y, x_0 \rangle \notin f^{-1}(\tilde{K})$, d.h. $\langle y, x_0 \rangle \notin f^{-1}(\tilde{K})$.

Nun gilt zum einen $K \leq_m \tilde{\bar{K}}$ via g mit $g(y) := f(\langle y, x_0 \rangle)$; denn: $y \in K \implies \langle y, x_0 \rangle \in f^{-1}(\tilde{K}) \implies g(y) \in \tilde{K}$, sowie $y \notin K \implies \langle y, x_0 \rangle \notin K \times \bar{K} = f^{-1}(K \text{Jung} \bar{K}) \implies f(\langle y, x_0 \rangle) = g(y) \notin K \text{Jung} \bar{K} \implies g(y) \notin \tilde{\bar{K}}$ (Letzteres wegen $\tilde{K} \subset K \text{Jung} \bar{K}$).

Da außerdem $\bar{K} \leq_m \tilde{\bar{K}}$ via h mit $h(x) := 2x$, sowie $\tilde{\bar{K}} \leq_m \bar{K}$ via k mit $k(x) := x$, falls x gerade, und $k(x) := \frac{x-1}{2}$, falls x ungerade, gilt zum andern $\tilde{\bar{K}} \equiv_m \bar{K}$.

Daraus ergibt sich vermöge der Transitivität von $\leq_m$, daß $K \leq_m \bar{K}$, also $\bar{K} \leq_m K$,

und damit $\bar{K}$ rekursiv aufzählbar - Widerspruch!

Womit die Annahme, daß $K \times \bar{K} \leq_m K \text{ Jung } \bar{K}$, widerlegt ist. Q.e.d.

Obwohl also $K \times \bar{K}$ und $K \text{ Jung } \bar{K}$ gemäß Satz 6 in verschiedenen, wenngleich vergleichbaren m -Graden liegen, sind diese Mengen doch, wie gesagt, dem intuitiven Reduzierbarkeitsbegriff nach äquivalent. Nicht allein, daß sie zusammen mit K und $\bar{K}$ in ein und demselben Grad der Unlösbarkeit liegen, - es gilt darüberhinaus ganz allgemein, daß für je zwei nichtleere Mengen A und B die Mengen $A \times B$ und $A \text{ Jung } B$ stets demselben Grad angehören. Somit erhalten wir, wie bereits erwähnt, neben der eigens betrachteten m -Unvergleichbarkeit von K und $\bar{K}$ (vgl. §2.1, Satz 7, S. 41f.) in der Verschiedenheit von $d_m(K \times \bar{K})$ und $d_m(K \text{ Jung } \bar{K})$ ein weiteres Indiz dafür, daß die m -Reduzierbarkeit als Präzisierung des intuitiven Reduzierbarkeitsbegriffs bei weitem noch nicht befriedigend ist. Tatsächlich werden wir zur Verallgemeinerung des Reduzierbarkeitsbegriffs, wie wir sie im folgenden Kapitel vornehmen, in §4.1 um der Motivation willen von den besagten vier Mengen ausgehen. -

Der Beweis von Satz 3 (mit Hilfe des vorangehenden Lemmas) in §3.2 (vgl. S. 66ff.) legt, zusammen mit Satz 3 (S. 72), eine weitere Charakterisierung der Zylinder nahe.

Satz 7 (Rogers): $A \text{ Zylinder} \iff$ Es existiert eine rekursive Funktion g derart, daß für alle x gilt: $D_x \neq \emptyset \ \& \ D_x \subset A \implies g(x) \in A \setminus D_x$; sowie:
 $D_x \neq \emptyset \ \& \ D_x \subset \bar{A} \implies g(x) \in \bar{A} \setminus D_x$.

Beweis: Zuerst zur Richtung von rechts nach links. Wir zeigen, daß $\forall B [B \leq_m A \implies B \leq_1 A]$, woraus dann mit Satz 3 folgt, daß A ein Zylinder ist.

Gelte also $B \leq_m A$ via f . Da im Beweis des Satzes 3 von §3.2 bei der Konstruktion von f' auf die spezielle Gestalt der Menge K keine Rücksicht zu nehmen war, läßt f' sich hier wie dort so konstruieren, daß $B \leq_1 A$ via f' .

Nun zur Richtung von links nach rechts. Sei A ein Zylinder. Dann existiert nach dem Korollar zu Satz 4 eine rekursive Permutation f derart, daß $A \equiv A \times \mathbb{N}$ vermöge f , d.h. daß $f(A \times \mathbb{N}) = A$. Definiere für alle x :

$$h(x) := \begin{cases} 0, & \text{falls } x=0 \ (\iff D_x = \emptyset); \\ \mu y [y \in D_x], & \text{falls } x \neq 0 \ (\iff D_x \neq \emptyset). \end{cases}$$

Dann ist, da sich aus jeder Zahl x die endliche Menge mit x als kanonischem Index effektiv ermitteln, und sich sodann ihr kleinstes Element angeben läßt, h eine rekursive Funktion. Definiere weiter g als - vermöge der Rekursivität von π_1 , f und h - offensichtlich ebenfalls rekursive Funktion durch

$$g(x) := \langle \pi_1(f^{-1}(h(x))), \mu y [f(\langle \pi_1(f^{-1}(h(x))), y \rangle) \notin D_x] \rangle.$$

Wir zeigen, daß g die gewünschten Eigenschaften hat.

(1) Sei $D_x \neq \emptyset$, $D_x \subset A$. Dann gilt $h(x) = \mu y [y \in D_x] \in D_x \cap A$. Da $A = f(A \times \mathbb{N})$, gibt es ein $y \in A$ und ein $n \in \mathbb{N}$ mit $h(x) = f(\langle y, n \rangle)$, d.h. mit $f^{-1}(h(x)) = \langle y, n \rangle$ (also $y = \pi_1(f^{-1}(h(x)))$).

Da D_x endlich und f injektiv ist, gibt es ein $m \in \mathbb{N}$ mit $f(\langle y, m \rangle) \notin D_x$. Wähle m minimal, d.h. $m := \mu z [f(\langle y, z \rangle) \notin D_x] = \mu z [f(\langle \pi_1(f^{-1}(h(x))), z \rangle) \notin D_x]$. Dann ist $g(x) = f(\langle y, m \rangle) \in A \setminus D_x$.

(ii) Sei $D_x \neq \emptyset$, $D_x \subset \bar{A}$. Dann gilt $h(x) = \mu y [y \in D_x] \in D_x \cap \bar{A}$. Da $\bar{A} = \overline{f(A \times \mathbb{N})} = f(\bar{A} \times \mathbb{N})$ [denn: $y \in \overline{f(A \times \mathbb{N})} \iff y \notin f(A \times \mathbb{N}) \iff \neg \exists x \in A \times \mathbb{N} [y = f(x)] \iff \exists x \in \bar{A} \times \mathbb{N} [y = f(x)] \iff y \in f(\bar{A} \times \mathbb{N})$], also $h(x) \in f(\bar{A} \times \mathbb{N})$, gibt es $y \in \bar{A}$ und $n \in \mathbb{N}$ mit $h(x) = f(\langle y, n \rangle)$, d.h. mit $f^{-1}(h(x)) = \langle y, n \rangle$ (also wieder $y = \pi_1(f^{-1}(h(x)))$).

Da D_x endlich und f injektiv, gibt es entsprechend zu (i) ein $m \in \mathbb{N}$ mit $f(\langle y, m \rangle) \notin D_x$, m minimal, $m := \mu z [f(\langle y, z \rangle) \notin D_x] = \mu z [f(\langle \pi_1(f^{-1}(h(x))), z \rangle) \notin D_x]$. Dann ist $g(x) = f(\langle y, m \rangle)$, wobei diesmal $y \notin A$, $m \in \mathbb{N}$, also $g(x) \in \overline{f(A \times \mathbb{N})} = \bar{A}$, und folglich $g(x) \in \bar{A} \setminus D_x$. Q.e.d.

Die folgende Variante von Satz 7 findet sich in Young(1966), a.a.O. S.7:

Satz 8: A Zylinder $\iff$ Es existiert eine rekursive Funktion f derart, daß für alle x gilt: $x \in A \implies W_{f(x)}$ ist eine unendliche Teilmenge von A ; sowie: $x \in \bar{A} \implies W_{f(x)}$ ist eine unendliche Teilmenge von $\bar{A}$.

§3.4 Schlichte Mengen; mesoische und mediale Mengen

In §2.3 beantworteten wir die dritte der dort (vgl. S.54) formulierten Fragen - ob jede nicht rekursiv aufzählbare Menge erzeugend sei - anhand sog. *f r e i e r* Mengen negativ. Offen blieb Frage (i): ob jede nicht-rekursive, rekursiv aufzählbare Menge kreativ sei. Nun gilt aber - analog unserer Bemerkung zu den erzeugenden (vgl. S.52) - auch für freie Mengen, daß sie uns weniger um ihrer selbst willen interessieren, als für den Fall, daß sie als Komplemente rekursiv aufzählbarer Mengen in Erscheinung treten. So beantworten wir in diesem Paragraphen (i) negativ, indem wir die Existenz einer rekursiv aufzählbaren Menge mit freiem Komplement, d.h. - entsprechend unserer Notation in §2.3 (S.55) - einer rekursiv aufzählbaren, ko-freien, per definitionem *s c h l i c h t e n* (von engl. "simple") Menge aufzeigen. Diese Mengen sind dann, da - nach Satz 4(b) von §2.3 - nicht ko-erzeugend, nicht kreativ. Da - entsprechend unserer Antwort auf Frage (ii) in §2.3 (S.54f.) - die kreativen Mengen genau die *m*-vollständigen sind, erhalten wir damit gleichzeitig Beispiele von rekursiv aufzählbaren, doch nicht *m*-vollständigen Mengen. Wenn wir nun schlichte Mengen nicht bereits, obwohl naheliegend genug, an früherer Stelle gebracht haben, so deswegen, weil ihre Definition wesentlich durch den Begriff der 1-Reduzierbarkeit - und damit indirekt durch den des Zylinders - motiviert ist. Post nämlich, von dem sie stammt, ging von der Frage aus, wann jede rekursive Menge auf eine gegebene rekursiv aufzählbare Menge 1-reduzierbar sei: "It is readily proved that the necessary and sufficient condition that every recursive set be one-one reducible to a given recursively enumerable set of positive integers S is that S is infinite, and $\bar{S}$ contains an infinite recursively enumerable set" (Post(1944), a.a.O. S.298). Dies führe uns auf die Frage nach der Existenz einer "recursively enumerable set of positive integers whose complement, though infinite, contains no infinite recursively enumerable set" (ebd.). Denn angenommen, S sei rekursiv aufzählbar derart, daß für alle rekursiven Mengen A gilt: $A \leq_1 S$. Gelte insbesondere $\mathbb{N} \leq_1 S$ via f . Dann ist, da f injektiv, $\text{range } f$ unendlich mit $\text{range } f \subset S$, also S unendlich. Für $\mathcal{R} \leq_1 S$ via g hingegen gilt $\text{range } g \subset \bar{S}$, also enthält, da g injektiv, $\bar{S}$ eine unendliche rekursiv aufzählbare Teilmenge. - Sei umgekehrt S unendlich, wobei $\bar{S}$ eine unendliche rekursiv aufzählbare Teilmenge enthalte. Sei $S = \text{range } f$ mit o.B.d.A. injektivem f , sowie $\bar{S} \supset B$, B unendlich, $B = \text{range } g$, g injektiv. Dann definiere zu beliebigem rekursiven A für alle x : $h(x) := f(x)$, wenn $x \in A$; und $h(x) := g(x)$, wenn $x \notin A$. Dann ist h eine rekursive und injektive Funktion, wobei für alle x : $x \in A \iff h(x) = f(x) \iff h(x) \in S$. I.e. $A \leq_1 S$ via h . Insbesondere folgt, was wir als Korollar vermerken, aus der Existenz schlichter Mengen, daß $\leq_m$ und $\leq_1$ auf den nicht-rekursiven, rekursiv aufzählbaren Mengen nicht übereinstimmen. Wie im Fall der kreativen Mengen (vgl. S.52) halten wir uns auch in dem der schlichten an die terminologische Differenzierung Dekkers (vgl. S.54).

Definition: A heißt schlicht, wenn

- (i) A rekursiv aufzählbar;
- (ii) $\bar{A}$ frei.

Satz 1 (Post): Es existiert eine schlichte Menge.

Beweis: (Vgl. Post(1944), a.a.O. S.298; wir folgen dem Beweis in Rogers(1967).)

Sei $C := \{ \langle x, y \rangle \mid y \in W_x \text{ \& } y > 2x \}$, also die Menge aller kodierten Paare, deren zweite Komponente Element der rekursiv aufzählbaren Menge ist, welche die erste als Index hat, und zudem mehr als doppelt so groß wie die erste ist. Dann ist C - als Projektion der Menge $\{ \langle x, y, z \rangle \mid P_x \text{ konvergiert in Anwendung auf } y \text{ in } z \text{ Schritten \& } y > 2x \}$ entlang der dritten Koordinate - nach dem Zweiten Projektionstheorem (S.33) rekursiv aufzählbar. Wähle ein (effektives) Verfahren, um C aufzulisten, und bilde sodann die Menge $C' := \{ \langle x, y \rangle \mid \langle x, y \rangle \in C \text{ \& } \forall z [z \neq y \text{ \& } \langle x, z \rangle \in C \implies \langle x, z \rangle \text{ erscheint in der Liste für C nach } \langle x, y \rangle] \}$. Da dann C' - als die Menge all jener Elemente von C, die in der Liste von C vor allen weiteren Elementen mit derselben ersten Komponente kommen - aus der Liste für C dadurch zu erhalten ist, daß man die jeweils auf ein Paar folgenden Paare mit gleicher erster Komponente einfach streicht, ist C' ebenfalls rekursiv aufzählbar. Nun bildet die Menge all der Paare (x,y), deren Kodierungen in C' liegen, also $\psi := \{ \langle x, y \rangle \mid \langle x, y \rangle \in C' \}$ eine partiell rekursive Funktion. Dann ist $S := \text{range } \psi$, bzw. $S = \{ y \mid \exists x [\langle x, y \rangle \in C'] \}$ schlicht. Denn:

- (i) Als Bildbereich einer partiell rekursiven Funktion ist S rekursiv aufzählbar.
- (ii) Da nach Konstruktion höchstens k Zahlen aus $\{0, 1, \dots, 2k\}$ in S liegen können (für alle k), ist $\bar{S}$ unendlich.
- (iii) Sei B unendlich und rekursiv aufzählbar, $B = W_{x_0}$. Dann gibt es (unendlich viele) Zahlen z in B, die größer als $2x_0$ sind. Für alle diese gilt $\langle x_0, z \rangle \in C$. Nach Definition von C' gibt es dann ein z_0 mit $\langle x_0, z_0 \rangle \in C'$, d.h. insbesondere $z_0 \in S$. Da $z_0 \in B$, ist $B \cap S \neq \emptyset$.

Gemäß (ii) und (iii) ist $\bar{S}$ frei, und folglich - mit (i) - S schlicht. Q.e.d.

Offenbar ist, wie Post eigens betont, jede schlichte Menge A eine rekursiv aufzählbare, nicht-rekursive Menge. Denn wäre A rekursiv, so wäre $\bar{A}$ nach Definition eine unendliche - gleichzeitig rekursiv aufzählbare - Teilmenge von $\bar{A}$, und damit nicht frei. Mit Post: "The decision problem of each simple set is therefore recursively unsolvable. We thus have obtained two infinite mutually exclusive classes of recursively enumerable sets with recursively unsolvable decision problems, the class of creative sets, and the class of simple sets. They are poles apart in that the complements of creative sets have a creative infinity of infinite recursively enumerable subsets, those of simple sets, not one" ("Das Entscheidungsproblem jeder schlichten Menge ist daher rekursiv unlösbar. Somit erhalten wir zwei unendliche, sich gegenseitig

ausschließende Klassen von rekursiv aufzählbaren Mengen mit rekursiv unlös-
barem Entscheidungsproblem: die Klasse der kreativen, und die Klasse der
schlichten Mengen. Es sind Pole für sich insofern, als die Komplemente der
kreativen Mengen eine kreative Unendlichkeit von unendlichen rekursiv auf-
zählbaren Teilmengen besitzen, jene der schlichten Mengen hingegen keine ein-
zige" (Post(1944), a.a.O. S.299)).

Satz 2: A schlicht $\implies$ (i) A nicht kreativ;
(ii) A nicht m -vollständig;
(iii) A kein Zylinder.

Beweis: Sei A schlicht.

(i) Angenommen, A kreativ. Dann enthält $\bar{A}$ als erzeugende Menge eine unendli-
che rekursiv aufzählbare Teilmenge (§2.3, Satz 4(b)) - im Widerspruch zur
Definition der schlichten Menge.

(ii) Wäre A m -vollständig, so auch (§2.3, Satz 9(b)) kreativ - im Widerspruch
zu (i)!

(iii) Angenommen, A Zylinder, $A \equiv C \times \mathbb{N}$ für geeignetes C . Da $\bar{A} \neq \emptyset$, ist auch
 $\bar{C} \times \mathbb{N} = \bar{C} \times \mathbb{N} \neq \emptyset$, also $\bar{C} \neq \emptyset$. Dann ist für $m \in \bar{C}$ die Menge $\{m\} \times \mathbb{N}$ eine
unendliche rekursiv aufzählbare Teilmenge von $\bar{C} \times \mathbb{N}$. Dann enthält aber -
wegen $\bar{A} \equiv \bar{C} \times \mathbb{N}$ - auch $\bar{A}$ eine unendliche rekursiv aufzählbare Teilmenge:
Widerspruch analog (i)!

Den letzten Sätzen nach existieren also nicht-rekursive, rekursiv auf-
zählbare Mengen, die weder kreativ, m -vollständig, noch Zylinder sind. Damit
erhalten wir als Korollar:

Korollar: $\equiv_m$ und $\equiv_1$ stimmen auf den nicht-rekursiven, rekursiv aufzählbaren
Mengen nicht überein; ebenso wenig $\leq_m$ und $\leq_1$.

Beweis: Sei S die in Satz 1 konstruierte Menge. Nach §3.3, Satz 2, gilt
 $S \equiv_m S \times \mathbb{N}$. Da S nach Satz 2(iii) kein Zylinder, folgt mit dem Korol-
lar zu Satz 4, §3.3, daß nicht $S \equiv_1 S \times \mathbb{N}$, d.h. $S \not\equiv_1 S \times \mathbb{N}$. Also sind
 $d_m(S)$ und $d_1(S)$ nicht identisch. - Da $S \leq_1 S \times \mathbb{N}$, folgt $S \times \mathbb{N} \not\leq_1 S$. Da
aber $S \times \mathbb{N} \leq_m S$, stimmen $\leq_m$ und $\leq_1$ auf S bzw. $S \times \mathbb{N}$ nicht überein. -

Wie Post weiter bemerkt, kann keine kreative Menge C auf eine schlich-
te Menge S 1-reduzierbar sein. Denn für $C \leq_1 S$ via f würde jede unendliche re-
kursiv aufzählbare Teilmenge von $\bar{C}$ - wie es sie nach Voraussetzung gibt -
durch f (injektiv) auf eine unendliche rekursiv aufzählbare Teilmenge von $\bar{S}$
abgebildet - im Widerspruch zu $\bar{S}$ frei. Da aber aufgrund der 1-Vollständigkeit
von K jedenfalls $S \leq_1 K$, bieten sich schlichte Mengen somit "als Kandidaten
für rekursiv aufzählbare Mengen an, deren Entscheidungsproblem von niedrige-
rem Unlösbarkeitsgrad ist als der der vollständigen Menge K " (Post(1944), S.299).
In Zeichen ausgedrückt: $S <_1 K$. - Auch für den Fall der m -Reduzierbarkeit er-

halten wir das analoge Resultat: Da eine schlichte Menge nach Satz 2 (ii) nicht m -vollständig ist - im Gegensatz zu K -, muß $S <_m K$ gelten. Daß wir tatsächlich noch viel weiter gehen können, besagt der in Kapitel V bewiesene Satz, daß keine kreative Menge auf eine schlichte beschränkt wahrheitsfunktional reduzierbar ist (vgl. Post(1944), a.a.O. S.301ff.).-

Nach dieser Betonung der Disjunktheit der Klasse der kreativen mit der der schlichten Mengen drängt sich die Frage auf, ob durch deren Vereinigung die Klasse aller nicht-rekursiven, rekursiv aufzählbaren Mengen bereits ausgeschöpft wird. In diesem Sinne schreibt Dekker: "The class of all creative sets is denoted by H . The question arises whether H and Z exhaust $F-E$. It is the purpose of this note to answer this question in the negative. The set α is called *medial* if it is not r.e. and neither immune nor productive. The set α is called *mesoic* if α is r.e. and α' medial, i.e., if $\alpha \in (F-E) - (Z+H)$ " ("Die Klasse aller kreativen Mengen wird durch H bezeichnet. Es erhebt sich die Frage, ob H und Z (i.e. nach Dekkers Notation die Klasse der schlichten Mengen) $F-E$ (i.e. die Klasse der rekursiv aufzählbaren, nicht-rekursiven Mengen) ausschöpfen. Es ist die Absicht dieser Schrift, diese Frage negativ zu beantworten. Die Menge α heißt *medial*, wenn sie nicht rekursiv aufzählbar und weder frei noch erzeugend ist. Die Menge α heißt *mesoisch*, wenn α rekursiv aufzählbar, und α' (i.e. hier das Komplement von α) medial ist, d.h. wenn $\alpha \in (F-E) - (Z+H)$ "; Dekker(1953), a.a.O. S.499). Mesoisch sind demnach die nicht-rekursiven, rekursiv aufzählbaren Mengen, die weder kreativ noch schlicht sind. Als wesentliches Resultat der zitierten Arbeit beweist Dekker die Existenz einer mesoischen Menge v , deren m -Grad zwischen dem der schlichten Menge S und dem der kreativen Menge K liegt, während ihr 1 -Grad mit dem von S identisch ist, also unter $d_1(K)$ liegt (vgl. S.79). Wir schlagen einen etwas anderen Weg ein und zeigen mit Rogers(1967), daß die Zylindrifizierung jeder schlichten Menge mesoisch ist. Insbesondere folgt daraus die Existenz mesoischer Mengen.

Satz 3: A schlicht $\implies A \times \mathbb{N}$ mesoisch.

Beweis: Sei A schlicht. Da A rekursiv aufzählbar, gilt dies auch für $A \times \mathbb{N}$. (Da $A \leq_1 A \times \mathbb{N}$, ist $A \times \mathbb{N}$ nicht rekursiv.) Als Zylinder ist $A \times \mathbb{N}$ nach Satz 2(iii) nicht schlicht. Angenommen schließlich, daß $A \times \mathbb{N}$ kreativ. Dann ist, da $A \times \mathbb{N} \leq_m A$, nach Satz 2(a) von §2.3 A erzeugend, und folglich A kreativ - im Widerspruch zu Satz 2(i). Also kann $A \times \mathbb{N}$ nicht kreativ sein, womit der Satz bewiesen ist.

Korollar: Es existiert eine mediale Menge.

Beweis: Wähle $\overline{A \times \mathbb{N}}$ mit $A \times \mathbb{N}$ aus dem Beweis des Satzes. Da $A \times \mathbb{N}$ rekursiv aufzählbar, aber nicht rekursiv, ist $\overline{A \times \mathbb{N}}$ nicht rekursiv aufzählbar.

$\overline{A \times \mathbb{N}}$ ist nicht erzeugend, da sonst - wegen $\overline{\overline{A \times \mathbb{N}}}$, also $A \times \mathbb{N}$ rekursiv aufzählbar - $A \times \mathbb{N}$ kreativ. $\overline{A \times \mathbb{N}}$ ist nicht frei, da andernfalls $A \times \mathbb{N}$ schlicht.-

Wie Rogers bemerkt, gibt es für die rekursiv aufzählbaren Mengen noch keine befriedigende Darstellungstheorie: "No satisfactory representation theory exists for recursively enumerable sets. A number of elementary questions remain unsettled" (a.a.O. S.120). Eine von Dekker, Myhill, sowie Uspenskij getroffene und untersuchte Klassifizierung bilde zwar "a useful catalogue of the kinds of behavior discovered so far", bleibe aber, "from a theoretical point of view", einigermaßen willkürlich (ebd.).

§3.5 Gradstruktur

Wie bereits festgestellt, besteht jeder m -Grad aus einem oder mehreren 1 -Graden (vgl. S.70). Dabei stellte die Definition des Zylinders in §3.3 einen Begriff bereit, mit dessen Hilfe die Struktur eines m -Grades etwas genauer in Abhängigkeit von den in ihm enthaltenen 1 -Graden zu bestimmen war. So sind nach Satz 3 aus §3.3 die Zylinder genau die Mengen, auf welche eine Menge genau dann 1 -reduziert werden kann, wenn sie auf m -reduziert werden kann; woraus folgte, daß jeder m -Grad einen maximalen 1 -Grad enthält. Wir gehen nun der Frage nach, wie viele 1 -Grade in einem bestimmten m -Grad enthalten sein können, und die wir am allgemeinsten in Satz 4 beantworten werden.

Satz 1 (Dekker): Der m -Grad einer schlichten Menge enthält eine unendliche Klasse von 1 -Graden, die in bezug auf $\leq_1$ linear geordnet sind (mit dem Ordnungstyp der ganzen Zahlen) und zur Gänze aus schlichten Mengen bestehen.

Zum Beweis benötigen wir das folgende Lemma.

Lemma: Seien A und B rekursiv aufzählbare Mengen derart, daß $B = A \cup \{m\}$ für ein $m \in \bar{A}$. Dann gilt:

- (i) A schlicht $\iff B$ schlicht;
- (ii) A schlicht $\implies B \leq_1 A \ \& \ A \leq_m B \ \& \ A \not\leq_1 B$.

Beweis: (i) Sei A schlicht. Dann ist A insbesondere rekursiv aufzählbar, also auch $A \cup \{m\} = B$. Mit $\bar{A}$ ist auch $\overline{A \cup \{m\}} = \bar{B}$ unendlich. Sei nun C rekursiv aufzählbar und unendlich. Dann gilt $C \cap A \neq \emptyset$, also insbesondere $C \cap (A \cup \{m\}) = C \cap B \neq \emptyset$; d.h. $\bar{B}$ ist frei. Daher B schlicht.~

Sei nun umgekehrt $B = A \cup \{m\}$ schlicht. Da man eine Auflistung von A erhält, indem man aus einer - nach Voraussetzung existenten - Liste für B die Zahl m streicht, ist A rekursiv aufzählbar. Weiter ist, wenn $\overline{A \cup \{m\}}$ unendlich, auch $\bar{A}$ unendlich. Und da für jedes unendliche rekursiv aufzählbare C gilt, daß $C \cap (A \cup \{m\}) \neq \emptyset$, muß auch für die - unendliche rekursiv aufzählbare - Menge $C \setminus \{m\}$ gelten, daß $(C \setminus \{m\}) \cap (A \cup \{m\}) \neq \emptyset$. Daraus folgt $C \cap A \neq \emptyset$, d.h. $\bar{A}$ ist frei. Also A schlicht.

(ii) Sei A schlicht, $B = A \cup \{m\}$ für ein $m \in \bar{A}$.

Zu " $A \leq_m B$ ": Sei $n \in \bar{A}$, $n \neq m$ (existiert, da $\bar{A}$ unendlich). Definiere

$$f(x) := \begin{cases} x, & \text{wenn } x \neq m; \\ n, & \text{wenn } x = m. \end{cases}$$

Dann ist f eine rekursive Funktion, und es gilt für alle x : $x \in A \implies x \neq m \implies f(x) = x \in A \subset B \implies f(x) \in B$; sowie: $f(x) \in B \implies f(x) \neq n \implies f(x) = x \in B \ \& \ x \neq m \implies x \in A$. Das heißt $A \leq_m B$ via f .~

Zu " $B \leq_1 A$ ": Da die Menge A rekursiv aufzählbar und unendlich ist, enthält sie eine unendliche rekursive Teilmenge C . Sei p eine rekursive Permutation, die $C \cup \{m\}$ auf C abbildet. Dann definiere für alle x

$$g(x) := \begin{cases} x, & \text{falls } x \notin C \cup \{m\}; \\ p(x), & \text{falls } x \in C \cup \{m\}. \end{cases}$$

Da $C \cup \{m\}$ rekursiv, ist g rekursiv. Seien $x, y \in \mathbb{N}$ mit $x \neq y$. Für $x, y \notin C \cup \{m\}$ gilt $g(x) = x \neq y = g(y)$. Für $x \notin C \cup \{m\}$, $y \in C \cup \{m\}$ (o.B.d.A.) folgt $g(x) = x$, $g(y) = p(y) \in C$, also insbesondere $g(x) \neq g(y)$. Und für $x, y \in C \cup \{m\}$ gilt $g(x) = p(x)$, $g(y) = p(y)$, da p per definitionem injektiv. Also ist g injektiv. - Und es gilt: $x \in B \implies x \in A$ oder $x=m \implies x \in C$ oder $x \in A \setminus C$ oder $x=m \implies x \in C \cup \{m\}$ oder $x \notin C \cup \{m\}$ und $x \in A \implies g(x) = p(x) \in C \subset A$ oder $g(x) = x \in A$, also in jedem Fall $g(x) \in A$; und umgekehrt: $g(x) \in A \implies (x \notin C \cup \{m\} \ \& \ g(x) = x \in A)$ oder $(x \in C \cup \{m\} \ \& \ g(x) = p(x) \in C \subset A) \implies x \in A$. Zusammen: $B \leq_1 A$ via g .

Zu " $A \not\leq_1 B$ ": Angenommen, $A \leq_1 B$; dann folgt mit $B \leq_1 A$, daß $A \equiv_1 B$, und daraus nach Myhill $A \equiv B$. Sei etwa $A \equiv B$ via die rekursive Permutation h , also $h(A) = B$. Wegen $m \in \bar{A}$ gilt $h(m) \in \bar{B} \subset \bar{A}$, $h(h(m)) \in \bar{A}$, usw. Da die Werte $m, h(m), h(h(m)), \dots$ paarweise verschieden sind, bilden sie eine unendliche rekursiv aufzählbare Teilmenge von $\bar{A}$ - im Widerspruch zur Schlichtheit von A (i.e. $\bar{A}$ frei)! Also $A \not\leq_1 B$.

Damit ist das Lemma bewiesen.

Beweis von Satz 1:

Sei A eine schlichte Menge. Dann sind insbesondere A und $\bar{A}$ unendlich. Sei $\{a_0, a_1, a_2, \dots\}$ eine unendliche Teilmenge von A , und $\{b_0, b_1, b_2, \dots\}$ eine unendliche Teilmenge von $\bar{A}$. Dann gilt durch wiederholte Anwendung von (i) des Lemmas, daß die Mengen $\dots, A \cup \{b_0, b_1\}, A \cup \{b_0\}, A, A \setminus \{a_0\}, A \setminus \{a_0, a_1\}, \dots$ schlicht sind. Außerdem folgt durch wiederholte Anwendung von (ii) des Lemmas, daß $\dots \leq_1 A \cup \{b_0, b_1\} \leq_1 A \cup \{b_0\} \leq_1 A \leq_1 A \setminus \{a_0\} \leq_1 A \setminus \{a_0, a_1\} \leq_1 \dots$, sowie $\dots \leq_m A \setminus \{a_0, a_1\} \leq_m A \setminus \{a_0\} \leq_m A \leq_m A \cup \{a_0\} \leq_m A \cup \{a_0, a_1\} \leq_m \dots$, also insbesondere $\dots \equiv_m A \setminus \{a_0, a_1\} \equiv_m A \setminus \{a_0\} \equiv_m A \equiv_m A \cup \{a_0\} \equiv_m A \cup \{a_0, a_1\} \equiv_m \dots$; d.h. die Mengen liegen alle im m -Grad von A . Da aber $\dots \not\leq_1 A \setminus \{a_0, a_1\} \not\leq_1 A \setminus \{a_0\} \not\leq_1 A \not\leq_1 A \cup \{b_0\} \not\leq_1 A \cup \{b_0, b_1\} \not\leq_1 \dots$, liefert die Folge eine lineare Ordnung von 1-Graden schlichter Mengen. Das heißt, für $d_1(A)$ gilt:

$$\dots <_1 d_1(A \cup \{b_0, b_1\}) <_1 d_1(A \setminus \{b_0\}) <_1 d_1(A) <_1 d_1(A \setminus \{a_0\}) <_1 d_1(A \setminus \{a_0, a_1\}) <_1 \dots \text{ . Q.e.d.}$$

Korollar: Der m -Grad einer freien Menge enthält unendlich viele 1-Grade.

Beweis: Sei C eine freie Menge. Konstruiere die Mengen $\dots, C \cup \{b_0, b_1\}, C \cup \{b_0\}, C, C \setminus \{a_0\}, C \setminus \{a_0, a_1\}, \dots$ analog zum Beweis von Satz 1. Dann bilden die dazugehörigen 1-Grade eine unendliche Folge - da sich im Fall desselben 1-Grades zweier Mengen ein Widerspruch wie in " $A \not\leq_1 B$ " des Lemmas ergäbe. -

Eine stärkere Form von Satz 1 bewies Young: "Jeder nicht-rekursive m -Grad besteht entweder aus einem einzigen 1-Grad, oder aber er enthält eine Klasse von 1-Graden, die in bezug auf 1-Reduzierbarkeit vom Ordnungstyp ν der rationalen Zahlen ist" (Young(1966), S.70). Jockusch hat gezeigt, daß es rekursiv aufzählbare, von $d_m(\emptyset)$, $d_m(\mathbb{N})$ und $d_m(K)$ verschiedene m -Grade gibt, die aus einem einzigen 1-Grad bestehen (vgl. Jockusch(1966)). Im folgenden beweisen wir noch einige in Rogers(1967) zitierte Resultate von Jockusch.

Satz 2 (Jockusch): $A \text{ Jung} \leq_1 A \iff A$ ist Zylinder.

Beweis: Es gilt stets $A \text{ Jung} \leq_m A$ (via f mit $f(x) := \frac{x}{2}$, falls x gerade, und $= \frac{x-1}{2}$, falls x ungerade). Da A - bei der Richtung von rechts nach links - nach Voraussetzung ein Zylinder ist, folgt $A \text{ Jung} \leq_1 A$ nach Satz 3 von §3.3. -

Gelte nun umgekehrt $A \text{ Jung} \leq_1 A$ via f . Wir werden eine Funktion g so definieren, daß $A \times \mathbb{N} \leq_1 A$ via g . Da trivialerweise $A \leq_1 A \times \mathbb{N}$, folgt dann, daß $A \equiv A \times \mathbb{N}$, d.h. A ein Zylinder ist.

Um $A \times \mathbb{N}$ auf A zu reduzieren, betrachten wir $A \times \mathbb{N}$ als (disjunkte) Vereinigung aller $A \times \{n\}$ mit $n=0,1,2,\dots$, wobei wir nacheinander zuerst $A \times \{0\}$, dann $A \times \{1\}$, $A \times \{2\}$ usw. injektiv in A abbilden. Dazu verwenden wir die nach Voraussetzung injektive Funktion f , vermöge welcher $A \text{ Jung} \leq_1 A$. Da $A \text{ Jung} \leq_1 A$ die disjunkte Vereinigung von $2A := \{2a \mid a \in A\}$ und $2A+1 := \{2a+1 \mid a \in A\}$ ist, sind auch $f(2A)$ und $f(2A+1)$ als Teilmengen von A disjunkt. Also wird, wenn wir $A \times \{0\}$ vermöge der rekursiven Funktion $\underline{2}'$ mit $\underline{2}'(x) := 2\pi_1(x)+1$ (für alle x) auf $2A+1$, und sodann $2A+1$ vermöge f in A abbilden, dadurch ein Teil von A nicht erfaßt, d.h. es gilt $A \setminus f(\underline{2}'(A \times \{0\})) \neq \emptyset$. Nachdem wir somit via $g := f \circ \underline{2}'$ die Menge $A \times \{0\}$ in A abgebildet haben, können wir in den dadurch nicht erfaßten Teil die Menge $A \times \{1\}$ abbilden. Dies erfolgt wieder auf dem Umweg über $A \text{ Jung} \leq_1 A$. Bilde nämlich zuerst $A \times \{1\}$ via $\underline{2}'$ in $2A+1$, also via $f \circ \underline{2}'$ in A ab. Dann liegt, wenn $\underline{2}(x) := 2x$ für alle x , die Menge $\underline{2}(f(\underline{2}'(A \times \{1\})))$ in $2A$, und damit $f(\underline{2}(f(\underline{2}'(A \times \{1\}))))$ in A . Dann gilt, da $\underline{2}(f(\underline{2}'(A \times \{1\}))) \subset 2A$, daß $f(\underline{2}(f(\underline{2}'(A \times \{1\})))) \subset A \setminus f(\underline{2}'(A \times \{0\}))$. Außerdem gilt, daß, weil von $f(2A+1)$ ein Teil von A nicht erfaßt wird, von $\underline{2}(f(\underline{2}'(A \times \{1\})))$ ein Teil von $2A$, und damit von $f(\underline{2}(f(\underline{2}'(A \times \{1\}))))$ ein Teil von $A \setminus f(\underline{2}'(A \times \{0\}))$ nicht erfaßt wird; d.h. es gilt, daß die Menge $(A \setminus f(\underline{2}'(A \times \{0\}))) \setminus f(\underline{2}(f(\underline{2}'(A \times \{1\}))))$ ungleich $\emptyset$ ist. In diesen nichtleeren Teil von A wird nun folgendermaßen die Menge $A \times \{2\}$ abgebildet. Bilde $\underline{2}'(A \times \{2\})$ und $f(\underline{2}'(A \times \{2\})) \subset A$, dann $\underline{2}(f(\underline{2}'(A \times \{2\}))) \subset 2A$, dann $f(\underline{2}(f(\underline{2}'(A \times \{2\})))) \subset A \setminus f(\underline{2}'(A \times \{1\}))$, dann $\underline{2}(f(\underline{2}(f(\underline{2}'(A \times \{2\})))) \subset 2A \setminus \underline{2}(f(\underline{2}'(A \times \{1\})))$, und schließlich $f(\underline{2}(f(\underline{2}(f(\underline{2}'(A \times \{2\})))))) \subset (A \setminus f(\underline{2}'(A \times \{0\}))) \setminus f(\underline{2}(f(\underline{2}'(A \times \{1\}))))$. Usw. ... Da hier bei jedem Schritt A nicht voll ausgeschöpft wird, läßt sich das Verfahren ad infinitum fortsetzen, wobei ganz $A \times \mathbb{N}$ in disjunkte Teile von A abgebildet wird.

Nach Konstruktion lautet die schrittweise Definition von g :

$$\begin{aligned} g(\langle x, 0 \rangle) &:= f(\underline{z}'(x)), \\ g(\langle x, 1 \rangle) &:= f(\underline{z}(f(\underline{z}'(x)))), \\ g(\langle x, 2 \rangle) &:= f(\underline{z}(f(\underline{z}(\underline{z}'(x))))) , \\ &\vdots \text{ usw.;} \end{aligned}$$

d.h. allgemein: $g(\langle x, n \rangle) := (f \circ \underline{z})^n \circ (f \circ \underline{z}')(x)$, wobei die Schreibweise " $(f \circ \underline{z})^n$ " bedeutet, daß die Funktion $f \circ \underline{z}$ n -mal anzuwenden ist. Mit Hilfe der Projektionsfunktionen π_1 und π_2 ausgedrückt: $g(x) := ((f \circ \underline{z})^{\pi_2(x)} \circ (f \circ \underline{z}' \circ \pi_1))(x)$.

Wir beweisen nun formal, daß die Funktion g , wie bereits aus der Motivation anschaulich ersichtlich, die gewünschten Eigenschaften besitzt.

(i) Behauptung: g ist rekursiv.

Beweis: Da die Funktionen $\pi_1, \underline{z}'$ und f (letztere nach Voraussetzung) rekursiv sind, läßt sich für jedes x der Wert $f(\underline{z}'(\pi_1(x)))$ berechnen; sodann läßt sich aufgrund der Rekursivität von π_2 bestimmen, wie oft die (trivialerweise rekursive) Funktion $f \circ \underline{z}$ anzuwenden ist. Also ist g nach der Church'schen These rekursiv.

(ii) Behauptung: g ist injektiv.

Beweis: Wir zeigen zuerst durch Induktion, daß $(f \circ \underline{z})^n$ für alle n injektiv ist. Für $n=0$ ist $(f \circ \underline{z})^0 = \text{id}$ injektiv. Sei nun nach Induktionsvoraussetzung $(f \circ \underline{z})^n$ injektiv. Dann folgt aus der Injektivität von f und $\underline{z}$, daß auch $f \circ \underline{z} \circ (f \circ \underline{z})^n = (f \circ \underline{z})^{n+1}$ injektiv ist.-

Seien nun x und x' mit $x \neq x'$ gegeben, $x = \langle x_1, n_1 \rangle$, $x' = \langle x_2, n_2 \rangle$. Zu zeigen ist: $g(x) \neq g(x')$.

1. Fall: $n_1 = n_2 = n$. Dann gilt $x_1 \neq x_2$, und es folgt: $g(x) = g(\langle x_1, n \rangle) = (f \circ \underline{z})^n \circ (f \circ \underline{z}')(x_1) \neq (f \circ \underline{z})^n \circ (f \circ \underline{z}')(x_2) = g(\langle x_2, n \rangle) = g(x')$, da $\underline{z}', f$ und $(f \circ \underline{z})^n$ injektiv sind.

2. Fall: $n_1 \neq n_2$; o.B.d.A. $n_1 < n_2$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} g(x) &= g(\langle x_1, n_1 \rangle) = (f \circ \underline{z})^{n_1} \circ f(\underline{z}'(x_1)) \quad \text{und} \\ g(x') &= g(\langle x_2, n_2 \rangle) = (f \circ \underline{z})^{n_2} \circ f(\underline{z}'(x_2)) = \\ &= (f \circ \underline{z})^{n_1} \circ (f \circ \underline{z})^{n_2 - n_1} \circ f(\underline{z}'(x_2)) = \\ &= (f \circ \underline{z})^{n_1} \circ f \circ \underline{z} \circ (f \circ \underline{z})^{n_2 - n_1 - 1} \circ \sqrt{f(\underline{z}'(x_2))} = \\ &= (f \circ \underline{z})^{n_1} \circ f(2y) \quad \text{mit } y = (f \circ \underline{z})^{n_2 - n_1 - 1} \circ \sqrt{f(\underline{z}'(x_2))}. \end{aligned}$$

Wegen $2y \neq 2x_1 + 1 = \underline{z}'(x_1)$ folgt aus der Injektivität von f und $(f \circ \underline{z})^n$ die Behauptung.

(iii) Behauptung: $A \times \mathbb{N} \leq_1 A$ via g .

Beweis: Wir zeigen zuerst durch Induktion, daß $x \in A \iff (f \circ \underline{z})^n(x) \in A$ für alle n .

$$n=0: x \in A \iff x = \text{id}(x) = (f \circ \underline{z})^0(x) \in A.$$

$n \rightarrow n+1$: Sei zuerst $x \in A$, und nach Ind.vor. $(f \circ \underline{z})^n(x) \in A$. Dann ist $\underline{z}((f \circ \underline{z})^n(x)) \in 2A \subset A \cup \text{Jung}A$, und folglich $f(\underline{z}((f \circ \underline{z})^n(x))) = (f \circ \underline{z})^{n+1}(x) \in A$. - Gelte nun, zum Beweis der umgekehrten Impli-

kation, nach Ind.vor. " $(f \circ \underline{z})^n(x) \in A \implies x \in A$ ". Sei $(f \circ \underline{z})^{n+1}(x) = (f \circ \underline{z}) \circ (f \circ \underline{z})^n(x) \in A$. Dann ist $\underline{z}((f \circ \underline{z})^n(x)) = \underline{z}(f \circ \underline{z})^n(x) \in \text{Ajung}A$, also, da gerade, $\in 2A$. Also $(f \circ \underline{z})^n(x) \in A$, und folglich nach Ind.vor. $x \in A$.

Zu zeigen bleibt: $\langle x, n \rangle \in A \times \mathbb{N} \iff g(\langle x, n \rangle) \in A$.

Sei daher $\langle x, n \rangle \in A \times \mathbb{N}$. Dann ist $x \in A$, $\underline{z}'(x) = 2x+1 \in \text{Ajung}A$, $f(\underline{z}'(x)) \in A$, und somit $(f \circ \underline{z})^n \circ (f \circ \underline{z}')(x) = g(\langle x, n \rangle) \in A$. - Sei umgekehrt $g(\langle x, n \rangle) = (f \circ \underline{z})^n \circ (f \circ \underline{z}')(x) \in A$. Dann ist $(f \circ \underline{z}')(x) \in A$, also $\underline{z}'(x) = 2x+1 \in \text{Ajung}A$, d.h. $x \in A$. Daher $\langle x, n \rangle \in A \times \mathbb{N}$. - Damit ist der Satz vollständig bewiesen.

Korollar: Es gibt nicht-rekursive, rekursiv aufzählbare Mengen A und B derart, daß $\text{Ajung}B$ keine kleinste obere Schranke von A und B in der 1-Ordnung ist.

Beweis: Sei $A=B$, A nicht-rekursiv und rekursiv aufzählbar, dabei aber kein Zylinder. Wähle etwa $A := S$. Dann gilt (wegen $A \leq_1 A$ und $B \leq_1 A$), daß A eine obere Schranke von A und B ist; doch ist $\text{Ajung}B \not\leq_1 A$, d.h. $\text{Ajung}B$ ist nicht kleinste obere Schranke von A und B .

Satz 7 (Jockusch): A oder B Zylinder $\implies \text{Ajung}B$ ist kleinste obere Schranke von A und B in der 1-Ordnung.

Beweis: Sei o.B.d.A. A ein Zylinder.

$\text{Ajung}B$ ist obere Schranke von A und B . Sei auch D eine obere Schranke von A und B mit $A \leq_1 D$ via $\tilde{f}_1$, und $B \leq_1 D$ via f_2 . Zu zeigen: $\text{Ajung}B \leq_1 D$.

Da $\tilde{f}_1$ und f_2 für gewisse Argumente dieselben Werte liefern können, ist die Funktion g , vermöge welcher $\text{Ajung}B$ auf D 1-reduziert werden soll, nicht ohne weiteres durch $\tilde{f}_1$ und f_2 auszudrücken. Da aber A ein Zylinder, gibt es - nach dem Korollar zu Satz 4 in §3.3 - ein f_1 derart, daß $(A \equiv) A \times \mathbb{N} \leq_1 D$ via f_1 . Definiere nun die Funktion g induktiv durch

$g(0) := f_1(\langle 0, 0 \rangle)$; und für $x > 0$:

$$g(2x) := f_1(\langle x, \mu \nu [(\forall z < x) [g(2z+1) + f_1(\langle x, y \rangle)]] \rangle), \text{ sowie}$$

$$g(2x+1) := \begin{cases} f_2(x), & \text{falls } (\forall z \leq x) [g(2z) + f_2(x)]; \\ f_1(\langle \mu \nu [g(2z) = f_2(x)], \mu \nu [(\forall z < 2x+1) [g(z) + f_1(\langle x_0, y \rangle)]] \rangle), & \\ & \text{falls } (\exists z \leq x) [g(2z) = f_2(x)] \text{ für } x_0 := \mu \nu [g(2z) = f_2(x)]. \end{cases}$$

Da die Funktionen f_1 und f_2 rekursiv sind, und daher die beschränkten Quantoren in den definierenden Bedingungen von g "entschieden" werden können, ist g offenbar rekursiv. - Die Anwendung des μ -Operators bei der Definition von $g(2x)$ gewährleistet, daß der Funktionswert für gerade Zahlen von den Funktionswerten aller ihrer ungeraden Vorgänger verschieden ist. Hingegen fordert die erste Definitionsbedingung für $g(2x+1)$, daß der Funktionswert für ungerade Zahlen von denen aller ihrer geraden Vorgänger verschieden sein soll. Andernfalls führt eine "Schachtelung" des μ -Operators auch hier zur gewünschten Injektivität. - Durch Fallunterscheidung erkennt man schließlich, daß für alle z gilt: $z \in \text{Ajung}B \iff g(z) \in D$. Nämlich:

- (1) $z=0$: $0 \in \text{A Jung B} \iff 0 \in A \iff \langle 0, 0 \rangle \in A \times \mathbb{N} \iff f_1(\langle 0, 0 \rangle) = g(0) \in D$.
- (11) $z=2x$: $z \in \text{A Jung B} \iff x \in A \iff \langle x, n \rangle \in A \times \mathbb{N}$ für alle $n \iff f_1(\langle x, n \rangle) \in D$
für alle $n \iff g(2x) = g(z) \in D$.
- (111) $z=2x+1$ & $(\forall z \leq x)[g(2z) = f_2(x)]$: $2x+1 \in \text{A Jung B} \iff x \in B \iff f_2(x) \in D \iff$
 $\iff g(2x+1) \in D$.
- $z=2x+1$ & $(\exists z \leq x)[g(2z) = f_2(x)]$: $2x+1 \in \text{A Jung B} \iff x \in B \iff f_2(x) \in D \iff$
 $\iff \mu z[g(2z) = f_2(x)] \in A$ (da $2z \in \text{A Jung B} \iff f_1(\mu z[g(2z) = f_2(x)], \dots) =$
 $= g(2x+1) \in D$).

Also $\text{A Jung B} \leq_1 D$ via g . Q.e.d.

Satz 4 (Jockusch): Jeder m -Grad besteht entweder aus einem einzigen 1-Grad, oder er enthält eine unendliche linear geordnete Klasse von 1-Graden.

Beweis: 1. Fall: Der m -Grad enthält nur Zylinder. Dann folgt aus Satz 3, §3.3, daß er aus einem einzigen 1-Grad besteht.

2. Fall: Der m -Grad enthält einen Nicht-Zylinder A . Definiere:

$$\begin{aligned} A^1 &:= A; \\ A^2 &:= \text{A Jung } A; \\ A^3 &:= (\text{A Jung } A) \text{ Jung } (\text{A Jung } A); \\ &\vdots \\ A^{n+1} &:= A^n \text{ Jung } A^n. \end{aligned}$$

Dann ist für alle n die Menge A^n kein Zylinder.

Denn es gilt: B kein Zylinder $\implies B \text{ Jung } B$ kein Zylinder.

Um dies zu beweisen, zeigen wir die Kontraposition. Sei nämlich $B \text{ Jung } B$ ein Zylinder, $B \text{ Jung } B \equiv A \times \mathbb{N}$ für geeignetes A . Gelte etwa $B \text{ Jung } B = g(A \times \mathbb{N})$ für die rekursive Permutation g . Dann gilt $A \times \mathbb{N} \leq_1 B$ via die Reduktionsfunktion f mit der folgenden induktiven Rechenvorschrift für $f(x)$ (für beliebiges x). Berechne $g(\langle \pi_1(x), 0 \rangle)$, $g(\langle \pi_1(x), 1 \rangle)$, ..., bis sich ein n findet mit $g(\langle \pi_1(x), n \rangle)$ gerade & $\frac{g(\langle \pi_1(x), n \rangle)}{2} \notin \{f(0), \dots, f(x-1)\}$ oder $g(\langle \pi_1(x), n \rangle)$ ungerade & $\frac{g(\langle \pi_1(x), n \rangle) - 1}{2} \notin \{f(0), \dots, f(x-1)\}$. Je nachdem, setze $f(x) := \frac{g(\langle \pi_1(x), n \rangle)}{2}$ bzw. $:= \frac{g(\langle \pi_1(x), n \rangle) - 1}{2}$.

Dann ist f nach Konstruktion rekursiv und injektiv, und es gilt für alle x : $x \in A \times \mathbb{N} \iff \langle \pi_1(x), n \rangle \in A \times \mathbb{N}$ für alle $n \in \mathbb{N} \iff g(\langle \pi_1(x), n \rangle) \in B \text{ Jung } B$ für alle $n \in \mathbb{N} \iff f(x) \in B$.

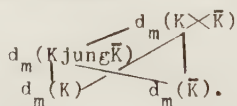
Da auch $B \leq_1 A \times \mathbb{N}$ via h mit $h(x) := g^{-1}(2x)$ - denn: $x \in B \iff 2x \in B \text{ Jung } B \iff g^{-1}(2x) \in A \times \mathbb{N} \iff h(x) \in A \times \mathbb{N}$ -, gilt $B \equiv_1 A \times \mathbb{N}$, und nach Myhill $B \equiv A \times \mathbb{N}$. Also ist B ein Zylinder.-

Nach Satz 2 folgt nun $A^{n+1} \not\leq_1 A^n$ für alle n , d.h. es gilt:

$$A^1 <_1 A^2 <_1 A^3 <_1 \dots <_1 A^n <_1 A^{n+1} <_1 \dots \quad \text{Q.e.d.}$$

§4.1 Heuristische Überlegungen nach Post(1944)

Zur Motivation der im folgenden zu begründenden allgemeineren Präzisierung des Reduzierbarkeitsbegriffs erinnern wir uns einer speziellen Gruppe von Mengen, welche, wenngleich dem intuitiven Verständnis von Reduzierbarkeit nach durchaus äquivalent, doch nicht in ein und demselben m -Grad lagen. Das erste unserer diesbezüglichen Ergebnisse war - neben der ⁱⁿ§2.1, Satz 2, verifizierten Trichotomie der rekursiven Grade - die in Satz 7 desselben Paragraphen konstatierte m -Unvergleichbarkeit der Mengen K und $\bar{K}$. Später bewiesen wir - in §3.3, Satz 6 (i) und (ii) -, daß $K \text{ Jung } \bar{K} <_m K \times \bar{K}$. Da außerdem $K \text{ Jung } \bar{K}$ und $K \times \bar{K}$ nicht rekursiv aufzählbar sind (sonst auch $\bar{K}$ rekursiv aufzählbar), kann - nach §2.1, Satz 1 - weder $K \text{ Jung } \bar{K} \leq_m K$, noch $K \times \bar{K} \leq_m K$ gelten; also auch, aus Gründen der Symmetrie, weder $K \text{ Jung } \bar{K} \leq_m \bar{K}$, noch $K \times \bar{K} \leq_m \bar{K}$. Daß aber sowohl $K \leq_m K \text{ Jung } \bar{K}$, als auch $\bar{K} \leq_m K \text{ Jung } \bar{K}$, folgt aus §2.1, Satz 8. Da auch $K \leq_m K \times \bar{K}$ und $\bar{K} \leq_m K \times \bar{K}$, ergibt sich für die vier Grade in der m -Reduzierbarkeitsordnung die folgende Struktur:



Obwohl demnach die Mengen $K, \bar{K}, K \text{ Jung } \bar{K}$ und $K \times \bar{K}$ in vier verschiedene m -Grade fallen, sind sie doch - im intuitiven Verständnis des Begriffs - alle paarweise aufeinander reduzierbar. Sie gehören, intuitiv gesprochen, ein und demselben Unlösbarkeitsgrad an, sind also äquivalent.- Betrachten wir dazu einige der zwölf möglichen Beziehungen. Da $x \in K \iff x \notin \bar{K}$, können wir unter der Voraussetzung, daß $\bar{K}$ entscheidbar, auch K entscheiden, und umgekehrt; also sind K und $\bar{K}$ gegenseitig aufeinander reduzierbar, i.e. äquivalent. Dies gilt selbstverständlich ganz allgemein für jede Menge und deren Komplement.- Daß - im Gegensatz zur m -Reduzierbarkeit - $K \text{ Jung } \bar{K}$ ebenso auf K wie auf $\bar{K}$ reduziert werden kann, ist leicht wie folgt einzusehen: Da $x \in K \text{ Jung } \bar{K} \iff (x \text{ gerade} \ \& \ \frac{x}{2} \in K)$ oder $(x \text{ ungerade} \ \& \ \frac{x-1}{2} \in \bar{K})$, können wir unter der Voraussetzung der Entscheidbarkeit von K bzw. $\bar{K}$ für eine beliebige Zahl x auch entscheiden, ob $x \in K \text{ Jung } \bar{K}$ oder nicht. Prüfe nämlich zuerst, ob x gerade oder ungerade, und sodann, ob $\frac{x}{2} \in K$ bzw. $\frac{x-1}{2} \in \bar{K}$. Genau dann, wenn einer dieser Fälle vorliegt, ist $x \in K \text{ Jung } \bar{K}$, andernfalls nicht.- Etwas umständlicher ist der Nachweis der intuitiven Reduzierbarkeit von $K \text{ Jung } \bar{K}$ auf $K \times \bar{K}$. Um unter der Annahme, daß $K \times \bar{K}$ entscheidbar sei, für ein beliebiges x zu entscheiden, ob $x \in K \text{ Jung } \bar{K}$, prüfe zuerst wieder, ob x gerade oder ungerade. Wenn x gerade, dann berechne $\frac{x}{2}$ und entscheide, ob $\langle \frac{x}{2}, y_0 \rangle \in K \times \bar{K}$ (wobei $y_0 \in \bar{K}$ beliebig); wenn ja, dann gilt $\frac{x}{2} \in K$ und folglich $x \in K \text{ Jung } \bar{K}$; falls nicht, so $\frac{x}{2} \notin K$, und daher $x \notin K \text{ Jung } \bar{K}$. Ist x da-

gegen ungerade, so berechne $\frac{x-1}{2}$ und entscheide, ob $\langle z_0, \frac{x-1}{2} \rangle \in K \times \bar{K}$ (mit $z_0 \in K$ beliebig); wenn ja, dann gilt $\frac{x-1}{2} \in \bar{K}$, und mithin $x \in K \text{ Jung } \bar{K}$; falls nicht, so $\frac{x-1}{2} \notin \bar{K}$, und damit $x \notin K \text{ Jung } \bar{K}$. - Wäre wiederum K bzw. $\bar{K}$ entscheidbar, so könnten wir, da $\langle x, y \rangle \in K \times \bar{K} \iff x \in K \text{ \& } y \in \bar{K}$, mittels zweier Entscheidungen für beliebiges z prüfen, ob $z \in K \times \bar{K}$ oder nicht. Berechne nämlich $\pi_1(z)$ und $\pi_2(z)$ und entscheide, ob $\pi_1(z) \in K$ und $\pi_2(z) \in \bar{K}$; genau dann, wenn beides der Fall ist, gilt $z \in K \times \bar{K}$, andernfalls $z \notin K \times \bar{K}$. Also ist auch $K \times \bar{K}$ intuitiverweise auf K bzw. $\bar{K}$ reduzierbar, was wir für den Fall der m -Reduzierbarkeit verneinen mußten. - Mehr oder weniger trivial ist schließlich auch der Nachweis intuitiver Reduzierbarkeit von $K \times \bar{K}$ auf $K \text{ Jung } \bar{K}$. Berechne dazu für beliebiges x die Werte $\pi_1(x)$ sowie $\pi_2(x)$ und entscheide, ob gleichzeitig $2\pi_1(x) \in K \text{ Jung } \bar{K}$ und $2\pi_2(x)+1 \in K \text{ Jung } \bar{K}$. Wenn ja, so gilt $\pi_1(x) \in K$ und $\pi_2(x) \in \bar{K}$, d.h. $x \in K \times \bar{K}$; andernfalls $x \notin K \times \bar{K}$. -

Die Konsequenz, die wir aus dieser Diskussion ziehen müssen, liegt auf der Hand. Wie bereits in §3.3 bemerkt (vgl. S.74f.), kann die Feststellung der Existenz von Mengen, die in verschiedenen - und überdies zum Teil sogar unvergleichbaren - m -Graden liegen, obwohl sie doch im intuitiven Verständnis von Reduzierbarkeit alle zusammen äquivalent sind, triftigerweise nur als Argument dafür gewertet werden, daß der Begriff der m -Reduzierbarkeit, so sehr er sich auf dem Wege der Präzisierung des intuitiven Reduzierbarkeitsbegriffs auch als erste Näherung anbot, als solche doch noch keineswegs befriedigt. Wir werden daher, ausgehend von den voranstehenden Beispielen, versuchen, einen neuen allgemeineren Begriff zu formulieren, der nicht zuletzt auch diesen gerecht wird.

Wieder geht die Definition auf Post(1944) zurück, der zum Zweck einer Verallgemeinerung der m -Reduzierbarkeit auf deren Darstellung durch eine Wahrheitstafel Bezug nimmt: "If S_1 is many-one reducible to S_2 , positive integer n being, or not being, in S_1 may be said to be determined by its correspondent m being, or not being, in S_2 in accordance with the truth-table

(S_2)	m	n	(S_1)
	+	+	
	-	-	."

("Ist S_1 m -reduzierbar auf S_2 , so kann man auch sagen, daß, ob die positive ganze Zahl n in S_1 liegt oder nicht, dadurch bestimmt ist, ob das ihr entsprechende m in S_2 liegt oder nicht, gemäß der Wahrheitstafel

(S_2)	m	n	(S_1)
	+	+	
	-	-	

"Vgl. Post(1944), a.a.O. S.299.)

Dabei sollen die Zeichen "+" bzw. "-" in der Spalte unter m die beiden Alternativen " $m \in S_2$ " bzw. " $m \notin S_2$ " bezeichnen. Dementsprechend sagt uns die Tafel durch das Zeichen in derselben Zeile unter n , ob n in S_1 liegt ("+") oder

nicht ("-"). Womit dann die Tafel besagt, daß, wenn m in S_2 liegt, n in S_1 liegt, bzw. daß, wenn $m \notin S_2$, auch $n \notin S_1$ - wie es bei der m -Reduzierbarkeit gerade gefordert ist.

Post gelangt nun zu seiner Verallgemeinerung, indem er die insgesamt vier Möglichkeiten betrachtet, bei welchen, ob n in S_1 liegt oder nicht, allein davon abhängig zu machen ist, ob m in S_2 liegt oder nicht: mit den Zeichen "+,-" unter n wie oben, oder aber "+,+", "-,-" und "-,+". "If then we have", fährt er fort, "an effective method which for each positive integer n will not only determine a unique corresponding positive integer m , but also one of these four "first order" truth-tables, and if in each case the table is such that for the correct statement of membership or non-membership of m in S_2 , it gives the correct statement of membership or non-membership of n in S_1 , then the decision problem of S_1 will thus be reduced to the decision problem of S_2 . For here also, given n , if we could somehow determine whether m is, or is not, in S_2 , we could thereby determine which row of the corresponding table correctly describes the membership or non-membership of m in S_2 , and from that row correctly determine whether n is, or is not, in S_1 " ("Haben wir dann ein effektives Verfahren, zu jeder positiven ganzen Zahl n nicht nur eine einzige entsprechende positive ganze Zahl m zu bestimmen, sondern zudem auch eine dieser vier Wahrheitstafeln "erster Ordnung", und ist dabei die Tafel in jedem Fall so beschaffen, daß sie zur richtigen Angabe der Zugehörigkeit oder Nichtzugehörigkeit von m zu S_2 die richtige Angabe über die Zugehörigkeit oder Nichtzugehörigkeit von n zu S_1 liefert, dann ist das Entscheidungsproblem von S_1 solchergestalt auf das Entscheidungsproblem von S_2 reduziert. Denn auch hierbei könnten wir, falls für gegebenes n irgendwie zu entscheiden wäre, ob m in S_2 oder nicht, eben dadurch ermitteln, welche Zeile der entsprechenden Tafel die Zugehörigkeit oder Nichtzugehörigkeit von m zu S_2 korrekt beschreibt, und alsdann aus dieser Zeile, ob n in S_1 oder nicht" (a.a.O. S.300)).

Schon an dieser Stelle ist deutlich, daß das Verfahren, soweit wie bisher beschrieben, eine echte Verallgemeinerung der m -Reduzierbarkeit bildet. Lassen sich doch damit alle vier zuvor diskutierten Mengen wechselseitig aufeinander reduzieren. So betrachten wir zur Reduktion von $S_1 = K$ auf $S_2 = \bar{K}$ einfach die folgende Wahrheitstafel erster Ordnung (mit "x" anstelle von m,n):

$(\bar{K})$	x	x	(K)
	+	-	
	-	+	

Da $x \in K \iff x \notin \bar{K}$, ist gemäß dieser Tafel K auf $\bar{K}$ reduzierbar. Umgekehrt ist durch dieselbe Tafel, sofern man nur " K " und " $\bar{K}$ " vertauscht, $\bar{K}$ auf K reduzierbar.- Um zu zeigen, daß auch $S_1 = K \text{ Jung } \bar{K}$ auf $S_2 = K$ mittels dieser Methode reduzierbar ist, betrachte zu beliebigem $n=x$ den Wert $m=\frac{x}{2}$, wenn x gerade, bzw.

$m = \frac{x-1}{2}$, wenn x ungerade. Im ersten Fall ist gemäß der Wahrheitstafel erster Ordnung:

(K)	$\frac{x}{2}$	x	(KjungK)
+		+	
-		-	

S_1 auf S_2 , d.h. KjungK auf K reduzierbar; im zweiten gemäß

(K)	$\frac{x-1}{2}$	x	(KjungK)
+		-	
-		+	

Umgekehrt ist KjungK auf K gemäß jenen Wahrheitstafeln reduzierbar, die aus den soeben betrachteten dadurch entstehen, daß man links des vertikalen Strichs "K" durch "K", und rechts davon "+" durch "-", und "-" durch "+" ersetzt; also gemäß

(K)	$\frac{x}{2}$	x	(KjungK)
+		-	
-		+	

bzw.

(K)	$\frac{x-1}{2}$	x	(KjungK)
+		+	
-		-	

Haben wir bislang das Prinzip der m -Reduzierbarkeit lediglich dadurch verallgemeinert, daß wir unter der Zahl n (bzw. x) nicht nur "+, -", sondern alle Permutationen dieser Zeichen zuließen, so gehen wir nun noch einen Schritt weiter, indem wir die n zugeordnete Zahl m nicht nur auf eine beschränken, sondern deren mehrere ins Auge fassen. Mit Post (wobei wir gleich in der Übersetzung zitieren): "Gebe es, allgemeiner, ein effektives Verfahren, das zu jeder positiven ganzen Zahl n eine endliche Folge positiver ganzer Zahlen $m_1, m_2, \dots, m_v$ bestimmt, wobei sowohl v als auch die m 's von n abhängen mögen. Liefere dieses Verfahren weiterhin entsprechend jedem n eine Wahrheitstafel " v -ter Ordnung" der Form

(S ₂)	m_1	m_2	...	m_v	n	(S ₁)
	+	+	...	+	-	
	+	+	...	-	+	
	:	:		:	:	
	-	-	...	-	-	

Jede Zeile bestimmt, links des senkrechten Strichs, eine der 2^v möglichen Fälle, wie die v m 's in S_2 liegen können oder nicht, und legt sich rechts des Strichs auf eine der Aussagen " n in S_1 ", " n nicht in S_1 " fest. Liefert sodann zu jedem n die Zeile der entsprechenden Tafel, welche die zutreffenden Aussagen über die Zugehörigkeit der m 's zu S_2 enthält, auch die richtige Angabe über die Zugehörigkeit oder Nichtzugehörigkeit von n zu S_1 , so wird ebendadurch das Entscheidungsproblem von S_1 wieder auf das Entscheidungsproblem von S_2 reduziert.- Besteht eine solche Situation, wobei "effektives Verfahren" durch "rekursives Verfahren" ersetzt ist, so sagen wir, daß S_1 auf S_2 durch Wahrheitstafeln reduzierbar ist. "Rekursives Verfahren" kann hier bedeuten, daß eine geeignete Gödelisierung des Paares bestehend aus der Folge $m_1, m_2, \dots, m_v$ und der Wahrheitstafel v -ter Ordnung eine rekursive Funktion von n ist" (a.a.O. S.300f.).

Auch hierfür einige Beispiele. Es stellt sich heraus, daß - nach den bereits vorgeführten Reduktionen von K auf $\bar{K}$, $\bar{K}$ auf K , $K \text{ Jung } \bar{K}$ auf K bzw. $\bar{K}$ - auch die restlichen der vier eingangs des Paragraphen diskutierten Mengen paarweise aufeinander durch Wahrheitstabeln reduzierbar sind. So etwa $S_1 := K \times \bar{K}$ auf $S_2 := K$. Wähle dazu die aus $n \times x$ effektiv berechenbaren Funktionswerte $m_1 := \pi_1(x)$ und $m_2 := \pi_2(x)$ ($\nu=2!$). Dann ist gemäß der Wahrheitstafel 2.Ordnung:

(K)	$\pi_1(x)$	$\pi_2(x)$	x	($K \times \bar{K}$)
	+	+	-	
	+	-	+	
	-	+	-	
	-	-	-	

- $K \times \bar{K}$ auf K reduzierbar. Ersetzt man in dieser Tafel links des senkrechten Strichs " K " durch " $\bar{K}$ ", rechts davon in der zweiten Zeile "+" durch "-", und in der dritten "-" durch "+", dann ist gemäß der neuen Tafel $K \times \bar{K}$ auf $\bar{K}$ reduzierbar. - Schließlich demonstrieren wir noch die "Wahrheitstafel-Äquivalenz" der Mengen $K \text{ Jung } \bar{K}$ und $K \times \bar{K}$. Wähle dazu als erstes $S_1 = K \text{ Jung } \bar{K}$, $S_2 = K \times \bar{K}$, sowie $y_0 \in \bar{K}$, $z_0 \in K$ fest. Dann ist für gerades x entsprechend der Wahrheitstafel 1.Ordnung:

($K \times \bar{K}$)	$\langle \frac{x}{2}, y_0 \rangle$	x	($K \text{ Jung } \bar{K}$)
	+	+	
	-	-	

für ungerades x gemäß

($K \times \bar{K}$)	$\langle z_0, \frac{x-1}{2} \rangle$	x	($K \text{ Jung } \bar{K}$)
	+	+	
	-	-	

- $K \text{ Jung } \bar{K}$ auf $K \times \bar{K}$ Wahrheitstafel-reduzierbar. - Umgekehrt ist $K \times \bar{K}$ auf $K \text{ Jung } \bar{K}$ reduzierbar vermöge

($K \text{ Jung } \bar{K}$)	$2\pi_1(x)$	$2\pi_2(x)+1$	x	($K \times \bar{K}$)
	+	+	+	
	+	-	-	
	-	+	-	
	-	-	-	

Machen wir uns nun abschließend zu unserer Rekapitulation des von Post vorgeschlagenen Verfahrens noch klar, daß dieses tatsächlich allen notwendigen Kriterien genügt, die wir für eine Präzisierung des intuitiven Reduzierbarkeitsbegriffs aufgestellt haben.

Auf den ersten Blick ist erkennbar, daß, wenn S_1 auf S_2 durch Wahrheitstabeln reduzierbar, und S_2 rekursiv ist, auch S_1 rekursiv ist. Denn ist S_2 rekursiv, so kann für die einem beliebigen n entsprechende Tafel genau entschieden werden, welche der 2^ν möglichen Zeilen links des vertikalen Strichs die Zugehörigkeit bzw. Nichtzugehörigkeit der ν m's zu S_2 richtig beschreibt, und demzufolge rechts davon die Zugehörigkeit bzw. Nichtzugehörigkeit von n zu S_1 abgelesen werden.

Nicht minder evident ist die Reflexivität dieser Reduzierbarkeitsrelation: Jede Menge S ist gemäß der Wahrheitstafel 1.Ordnung:

(S)	x	x	(S)
	+	+	
	-	-	

auf sich selbst reduzierbar.

Etwas schwieriger gestaltet sich der Nachweis der Transitivität.

Seien dazu S_1 auf S_2 , sowie S_2 auf S_3 reduzierbar gemäß der Wahrheitstafeln ν -ter bzw μ -ter Ordnung:

(S ₂)	m ₁	m ₂	...	m _{ν}	n	(S ₁)		(S ₃)	p ₁	p ₂	...	p _{μ}	q	(S ₂)
	+	+	...	+	-				+	+	...	+	+	
	+	+	...	-	+		bzw.		+	+	...	-	-	
	:	:	...	:	:				:	:	...	:	:	
	-	-	...	-	-				-	-	...	-	+	

Um nun unter der Voraussetzung der Rekursivität von S_3 für beliebiges n zu entscheiden, ob $n \in S_1$, betrachte zuerst die zu n gehörigen Zahlen $m_1, \dots, m_\nu$, deren Zugehörigkeit bzw. Nichtzugehörigkeit zu S_2 über die Zugehörigkeit von n zu S_1 entscheidet. Dann existiert zu jedem m_i ($1 \leq i \leq \nu$) eine endliche Folge von Zahlen $p_1, \dots, p_{\mu_i}$, deren Zugehörigkeit zu S_3 über die Zugehörigkeit von m_i zu S_2 befindet. Da S_3 rekursiv, ist dies für jedes m_i effektiv möglich. Damit ist dann die ausschlaggebende Zeile in der Tafel für n eindeutig bestimmt - und " $n \in S_1$?" entschieden. Insgesamt sind also neben der Tafel (ν -ter Ordnung) für n noch ν Wahrheitstafeln (jeweils p_{μ_i} -ter Ordnung) für die $m_1, \dots, m_\nu$ zu betrachten.-

Bei der nun folgenden Definition der Wahrheitstafel-Reduzierbarkeit werden wir den formal eleganteren Zugang von Rogers(1967) wählen und Reflexivität und Transitivität der Relation im Rahmen dieses Formalismus exakt beweisen.

§4.2 Definition nach Rogers(1967); Beispiele und einfache Eigenschaften

Obzwar der ursprüngliche Zugang Posts - auf den wir im folgenden lediglich noch zu heuristischen Zwecken zurückgreifen werden - der Idee und seinem mathematischen Gehalt nach im wesentlichen erhalten blieb, scheint er doch in seiner Notation zu umständlich, um nicht noch nach einer mathematisch eleganteren Formulierung zu verlangen. So werden in Rogers(1967), dem wir uns bei den folgenden Definitionen anschließen, die Wahrheitstafeln k -ter Ordnung zur k -stelligen Booleschen Funktion; die Zeilen links des senkrechten Strichs zu k -Tupeln von Wahrheitswerten, errechnet jeweils als Werte der charakteristischen Funktion von S_2 ; und das Paar bestehend aus einer Booleschen Funktion und einem Zahlen- k -Tupel $(x_1, x_2, \dots, x_k)$ zur Wahrheitstafelbedingung der Norm k . Die Beziehung zwischen der Zeile der - jedem n entsprechenden - Tafel, welche die Aussage über die Zugehörigkeit der m 's zu S_2 enthält, und der - rechts des Strichs ablesbaren - Aussage über n wird dann ausgedrückt durch die Funktionsgleichung

$$\alpha(c_{S_2}(m_1), \dots, c_{S_2}(m_k)) = 1, \text{ bzw. } = 0,$$

je nachdem, welcher Sachverhalt vorliegt.²

Zu operieren ist also im wesentlichen mit Mengen und Funktionen - anstelle der graphisch unhandlicheren Wahrheitstafeln -, wie es bereits Rogers' intuitive Darstellung nahelegt: "We say that A is "reducible" to B if there is an effective procedure such that for any x , we can find (i) a finite set of integers $\{y_1, y_2, \dots, y_k\}$ and (ii) a specification of how answers to the questions "is y_1 in B ?", "is y_2 in B ?", ..., "is y_k in B ?" determine whether or not $x \in A$ " ("Wir nennen A "reduzierbar" auf B , wenn es ein effektives Verfahren gibt derart, daß wir zu beliebigem x (i) eine endliche Menge von Zahlen $\{y_1, y_2, \dots, y_k\}$ finden können; und (ii) eine Bestimmung darüber, wie Antworten auf die Fragen "liegt y_1 in B ?", "liegt y_2 in B ?", ..., "liegt y_k in B ?" darüber entscheiden, ob $x \in A$ oder nicht" (a.a.O. S.109)).

Als Beispiel erscheint die "Reduzierbarkeit" von $A = K \times \bar{K}$ auf $B = K$. Zu gegebenem x nimmt man die Menge $\{\pi_1(x), \pi_2(x)\}$. Ist $\pi_1(x) \in B$ und $\pi_2(x) \notin B$, dann ist $x \in A$; ist $\pi_1(x) \notin B$ oder $\pi_2(x) \in B$, so $x \notin A$. - Ähnlich wird $A = \bar{K}$ auf $B = K$ reduziert. Die zu x gehörige Menge besteht dabei nur aus einem Element, nämlich x selbst. Wenn $x \notin B$, dann $x \in A$; falls $x \in B$, so $x \notin A$. -

Dementsprechend wird im folgenden die Wahrheitstafel-Notation Posts zu einer wahrheitsfunktionalen umformuliert. Anstelle von "+" und "-" erscheinen "1" und "0". Dann ist $I := \{0, 1\}$ als Menge der Wahrheitswerte, $I^k := I \times I \times \dots \times I$ (k Faktoren) als Menge aller k -Tupel von Wahrheitswerten zu interpretieren. Eine Funktion α , die I^k nach I abbildet, also $\alpha: I^k \rightarrow I$, heißt k -stellige Boolesche Funktion. Sie ist die genaue Entsprechung dessen, was Post als "Wahrheitstafel" ansah. Wie Wahrheitstafeln k -ter Ordnung, gibt es offenbar auch 2^{2^k} verschiedene

k-stellige Boolesche Funktionen.

Das geordnete Paar $((x_1, \dots, x_k), \alpha)$ mit dem Zahlen-k-Tupel $(x_1, \dots, x_k)$ als erster, und der k-stelligen Booleschen Funktion α ($k > 0$) als zweiter Komponente heißt eine Wahrheitstafelbedingung (bzw. tt-Bedingung, von "truth-table") der Norm k , die Menge $\{x_1, \dots, x_k\}$ die der tt-Bedingung zugeordnete Menge. Dabei sind die $x_1, \dots, x_k$ genau die Zahlen, welche einem gegebenen x zugeordnet und in die erste Zeile der entsprechenden Wahrheitstafel (über dem waagrechten, und links des senkrechten Strichs) geschrieben wurden. Die in den darunter stehenden Zeilen auftretende Verteilung von "+" und "-" entspricht nunmehr den 2^k möglichen k-Tupeln über I , d.h. den Elementen von I^k .

Wir sagen nun, daß die tt-Bedingung $((x_1, \dots, x_k), \alpha)$ von A erfüllt wird (bzw. daß A der tt-Bedingung genügt), wenn gilt:
 $\alpha(c_A(x_1), \dots, c_A(x_k)) = 1$.

Da jede Boolesche Funktion, und damit auch jede tt-Bedingung, ein endliches Objekt darstellt, ist leicht eine effektive Kodierung vorzunehmen, welche alle tt-Bedingungen (variierender Norm) auf $\mathbb{N}$ abbildet. Wir nehmen für das Folgende eine solche Kodierung als fest gewählt an und meinen dann, wenn wir von der "tt-Bedingung x " sprechen, die tt-Bedingung mit der Gödelzahl x .

Nach dieser Motivation der Terminologie können wir nun den Begriff der Wahrheitstafel-Reduzierbarkeit endgültig präzisieren.

Definition: A heißt wahrheitstafel-reduzierbar (bzw. wahrheitsfunktional reduzierbar) auf B (in Zeichen: $A \leq_{tt} B$), wenn es eine rekursive Funktion f gibt derart, daß für alle x gilt: $x \in A \iff B$ erfüllt die tt-Bedingung $f(x)$. In diesem Fall sagen wir: $A \leq_{tt} B$ via (oder vermöge) f . Dabei sprechen wir auch kurz von "tt-Reduzierbarkeit".

So intuitiv Überzeugend diese Präzisierung nach dem Vorhergegangenen auch scheint, wollen wir dennoch nicht darauf verzichten, ihre Adäquatheit in bezug auf alle notwendigen Kriterien im einzelnen formal nachzuprüfen.

Sei daher $A \leq_{tt} B$ via f , und B rekursiv. Wir zeigen, daß dann auch A rekursiv. Sei $f(x) = ((x_1, \dots, x_k), \alpha)$. Dann gilt: $x \in A \iff B$ erfüllt $f(x) \iff \alpha(c_B(x_1), \dots, c_B(x_k)) = 1$. Da nun wegen der Rekursivität von B jeder der Werte $c_B(x_i)$ mit $1 \leq i \leq k$ effektiv berechenbar, und α als k-stellige Boolesche Funktion fest vorgegeben ist, kann auch der Wert $\alpha(c_B(x_1), \dots, c_B(x_k))$ errechnet - und somit die rechte Seite der Äquivalenz entschieden werden. Damit aber auch " $x \in A$ ", und A ist rekursiv.

Nicht weniger leicht ist die Reflexivität der Relation $\leq_{tt}$ zu zeigen. Definiere dazu für beliebiges x $f(x) = ((x), \alpha)$ mit α als der einstelligen Booleschen Identität (d.h. $\alpha: I \rightarrow I, \alpha(0) = 0$ und $\alpha(1) = 1$). Dann gilt für jede beliebige Menge A : $x \in A \iff c_A(x) = 1 \iff \alpha(c_A(x)) = 1 \iff A$ erfüllt $f(x) = ((x), \alpha)$; und damit $A \leq_{tt} A$.

Etwas umständlicher ist, wie wir bereits im Rahmen des heuristischen Zugangs bemerkt haben (vgl. S. 93), der Beweis der Transitivität von $\leq_{tt}$. Sei dazu $A \leq_{tt} B$ via f , sowie $B \leq_{tt} C$ via g ; d.h. es gilt: $x \in A \iff B$ erfüllt $f(x)$, sowie: $x \in B \iff C$ erfüllt $g(x)$. Sei x gegeben mit $f(x) := ((y_1, \dots, y_m), \alpha)$. Es gilt: $x \in A \iff \alpha(c_B(y_1), \dots, c_B(y_m)) = 1$.

Berechne die tt -Bedingungen $g(y_1), \dots, g(y_m)$; seien

$$g(y_1) = ((z_{11}, \dots, z_{1n_1}), \beta_1),$$

$$g(y_2) = ((z_{21}, \dots, z_{2n_2}), \beta_2),$$

$\vdots$

$$g(y_m) = ((z_{m1}, \dots, z_{mn_m}), \beta_m).$$

Es gilt: $y_1 \in B \iff C$ erfüllt $g(y_1) \iff \beta_1(c_C(z_{11}), \dots, c_C(z_{1n_1})) = 1$

für alle i mit $1 \leq i \leq m$; sei dies die Bedingung (*).

Definiere nun die tt -Bedingung $h(x)$ mittels des λ -Operators als

$$h(x) := ((z_{11}, \dots, z_{1n_1}, z_{21}, \dots, z_{2n_2}, \dots, z_{m1}, \dots, z_{mn_m}), \lambda_{w_{11} \dots w_{1n_1} w_{21} \dots w_{2n_2} \dots w_{m1} \dots w_{mn_m}} [\alpha(\beta_1(w_{11}, \dots, w_{1n_1}), \beta_2(w_{21}, \dots, w_{2n_2}), \dots, \beta_m(w_{m1}, \dots, w_{mn_m}))])$$

Die Booleschen Funktionen $\beta_1, \dots, \beta_m$ sind $n_1, \dots, n_m$ -stellig, die Boolesche Funktion in $h(x)$ $(n_1 + \dots + n_m)$ -stellig. Und es gilt: $x \in A \iff B$ erfüllt $f(x) \iff \alpha(c_B(y_1), \dots, c_B(y_m)) = 1 \iff$ [Es gilt: $c_B(y_1) = 1 \iff y_1 \in B \iff$ (wegen (*))

$\beta_1(c_C(z_{11}), \dots, c_C(z_{1n_1})) = 1$, sowie: $c_B(y_1) = 0 \iff y_1 \notin B \iff$ (wegen (*))

$\beta_1(c_C(z_{11}), \dots, c_C(z_{1n_1})) = 0$ für alle i mit $1 \leq i \leq m$, also $c_B(y_1) = \beta_1(c_C(z_{11}), \dots, c_C(z_{1n_1}))$ für alle i]

$\iff \alpha(\beta_1(c_C(z_{11}), \dots, c_C(z_{1n_1})), \dots, \beta_m(c_C(z_{m1}), \dots, c_C(z_{mn_m}))) = 1$

$\iff \lambda_{w_{11} \dots w_{1n_1} w_{21} \dots w_{2n_2} \dots w_{m1} \dots w_{mn_m}} [\alpha(\beta_1(w_{11}, \dots, w_{1n_1}), \beta_2(w_{21}, \dots, w_{2n_2}), \dots, \beta_m(w_{m1}, \dots, w_{mn_m}))) (c_C(z_{11}), \dots, c_C(z_{1n_1}), c_C(z_{21}), \dots, c_C(z_{2n_2}), \dots, c_C(z_{m1}), \dots, c_C(z_{mn_m})) = 1 \iff tt\text{-Bedingung } h(x) \text{ von } C \text{ erfüllt.}$

Dies bedeutet, daß $A \leq_{tt} C$ via h . Q.e.d.

Nachdem wir so die Reflexivität und Transitivität von $\leq_{tt}$ bewiesen haben, können wir die entsprechende Äquivalenzrelation auf der Potenzmenge von $\mathbb{N}$ definieren.

Definition: $A \equiv_{tt} B \iff A \leq_{tt} B \ \& \ B \leq_{tt} A$.

Bezeichnung: A tt -äquivalent mit B .

Die Äquivalenzklassen von $\equiv_{tt}$, d.h. die Klassen der Gestalt $d_{tt}(A) :=$

$\{B \mid A \equiv_{tt} B\}$, heißen Wahrheitstafel-Grade bzw. tt -Grade.

Auch der Begriff der vollständigen Menge überträgt sich auf $\leq_{tt}$:

Definition: A heißt vollständig in bezug auf $\leq_{tt}$ (bzw. tt -vollständig), wenn

(i) A rekursiv aufzählbar;

(ii) $\forall E [B \text{ rekursiv aufzählbar} \implies E \leq_{tt} A]$.

Analog wie im Fall von $\leq_m$ ist eine tt -vollständige Menge vom größten tt -Grad unter den rekursiv aufzählbaren Mengen. Da, wie der folgende Satz zeigt, jede auf eine Menge B m -reduzierbare Menge A auch tt -reduzierbar auf B ist, ist jede m -vollständige Menge auch tt -vollständig. Insbesondere existieren daher tt -vollständige Mengen. Daß indes nicht jede tt -vollständige Menge auch m -vollständig, und damit der Begriff der tt -Vollständigkeit eine echte Verallgemeinerung der m -Vollständigkeit ist, wird im nächsten Paragraphen bewiesen.

Satz 1: $A \leq_m B \implies A \leq_{tt} B$ (für alle A, B).

Beweis: Sei $A \leq_m B$ via f ; d.h. f rekursiv, und für alle x : $x \in A \iff f(x) \in B$. Wie bereits Posts erstes Beispiel (S.89f.) demonstrierte, ist dann gemäß der Wahrheitstafel:

(B)	$f(x)$	x	(A)
	+	+	
	-	-	

A auf B reduzierbar. Also lautet die entsprechende tt -Bedingung: $g(x) := ((f(x)), \alpha)$ mit α als der einstelligen Booleschen Identitätsfunktion. Denn dann gilt: $x \in A \iff f(x) \in B \iff c_P(f(x))=1 \iff \alpha(c_P(f(x)))=1 \iff g(x)$ von B erfüllt; d.h. $A \leq_{tt} B$ via g .

Aus dem Satz ergibt sich selbstverständlich, daß $A \leq_m P \implies A \leq_{tt} B$; d.h. daß je zwei Mengen, welche in demselben m -Grad liegen, auch in demselben tt -Grad liegen. Wir können daher einen tt -Grad als aus m -Graden zusammengesetzt betrachten, die im allgemeinen nicht einmal miteinander vergleichbar zu sein brauchen.

Daß $\leq_{tt}$ tatsächlich eine echte Verallgemeinerung von $\leq_m$ darstellt, zeigte bereits das einführende Beispiel der Wahrheitstafel-Reduktion von K auf $\bar{K}$ (vgl. S.90), was für $\leq_m$ nicht möglich war. Allgemein gilt, wie der nächste Satz zeigt, für $\leq_{tt}$, daß eine Menge und ihr Komplement in ein und demselben Grad liegen. Da dies auch dem intuitiven Verständnis von Reduzierbarkeit entspricht, ist es ein überzeugendes Indiz dafür, daß dieser in Gestalt von $\leq_{tt}$ eine wesentlich adäquatere Präzisierung erfährt als im Fall von $\leq_m$ bzw. $\leq_1$.

Satz 2: $A \leq_{tt} \bar{A}$ (und folglich $A \equiv_{tt} \bar{A}$) für alle A .

Beweis: Für beliebiges A und beliebiges x definiere $f(x) := ((x), \alpha)$ mit $\alpha: I \rightarrow I$, $\alpha(0) := 1$ und $\alpha(1) := 0$. Dann gilt: $x \in A \iff c_A(x)=1 \iff c_{\bar{A}}(x)=0 \iff \alpha(c_{\bar{A}}(x))=1 \iff f(x)$ von $\bar{A}$ erfüllt; also $A \leq_{tt} \bar{A}$ vermöge f . Mit $\bar{A} \leq_{tt} \bar{\bar{A}}$, i.e. $\bar{A} \leq_{tt} A$, folgt daraus $A \equiv_{tt} \bar{A}$.

Aus Satz 2 geht - angesichts der Existenz von nicht-rekursiven, rekursiv aufzählbaren Mengen - hervor, daß ein tt -Grad sowohl rekursiv aufzählbare, als auch nicht rekursiv aufzählbare Mengen enthalten kann. Das heißt, es gilt - im Unterschied zu $\leq_m$ - im allgemeinen nicht, daß: $A \leq_{tt} B$ & B re-

kursiv aufzählbar $\implies$ A rekursiv aufzählbar, - auch dies durchaus im Einklang mit der Intuition. Wir nennen einen tt -Grad **rekursiv aufzählbar**, wenn er mindestens eine rekursiv aufzählbare Menge enthält. So ist zum Beispiel der tt -Grad von $\bar{K}$ rekursiv aufzählbar, da er K enthält. Man kann sogar zeigen, daß es rekursiv aufzählbare tt -Grade gibt, die unvergleichbar sind (vgl. Rogers(1967), Kap. 11).

Einen weiteren Unterschied zwischen m - und tt -Reduzierbarkeit, der letztere aufs neue als wesentlich adäquatere Präzisierung des intuitiven Reduzierbarkeitsbegriffs ausweist, bringt der folgende Satz. Denn wenn, gemäß unserer informellen Idee, ein Problem auf ein anderes "reduzierbar" heißen soll, wenn ein Verfahren zur Lösung des zweiten ein Verfahren zur Lösung des ersten liefert, dann sollte ein Problem, welches für sich bereits lösbar ist, trivialerweise auf jedes andere, gleich welcher Art, reduzierbar sein. In unserer Sprechweise: Eine rekursive Menge soll auf jede beliebige reduziert werden können.

Satz 3: $A \text{ rekursiv} \implies \forall B [A \leq_{tt} B]$.

Beweis: Wähle $f(x)$ als eine tt -Bedingung mit der Booleschen Funktion konstant gleich 1, wenn $x \in A$, und konstant gleich 0, wenn $x \notin A$; etwa

$$f(x) := \begin{cases} ((x), \alpha) \text{ mit } \alpha: I \rightarrow I, \alpha(0) = \alpha(1) = 1, \text{ wenn } x \in A; \\ ((x), \beta) \text{ mit } \beta: I \rightarrow I, \beta(0) = \beta(1) = 0, \text{ wenn } x \notin A. \end{cases}$$

Da A nach Voraussetzung rekursiv, ist die Definitionsbedingung für α bzw. β entscheidbar, und damit f rekursiv. Und es gilt für beliebiges B: $x \in A \iff \iff f(x) = ((x), \alpha) \iff \alpha(c_D(x)) = 1$ (wobei es insbesondere an dieser Stelle keine Rolle spielt, ob $x \in B$ oder nicht) $\iff f(x)$ von B erfüllt; also $A \leq_{tt} B$ via f .

Aus Satz 3 folgt, daß die tt -Reduzierbarkeitsordnung einen einzigen minimalen, i.e. einen kleinsten Grad besitzt, der genau aus den rekursiven Mengen besteht. Denn da, wenn A und B rekursiv, nach Satz 3 $A \leq_{tt} B$ und $B \leq_{tt} A$, also $A \equiv_{tt} B$ folgt, liegen alle rekursiven Mengen in ein und demselben tt -Grad, der dann - wieder aufgrund von Satz 3 - unter allen anderen tt -Graden liegt.-

Als erstes konkretes Beispiel eines tt -Grades wählen wir den - mehr oder weniger informell bereits als identisch erwiesenen - der vier eingangs exponierten Mengen.

Satz 4: $K \equiv_{tt} \bar{K} \equiv_{tt} K \text{ Jung } \bar{K} \equiv_{tt} K \times \bar{K}$.

Beweis: (i) $K \leq_{tt} \bar{K}$ nach Satz 2.

(ii) $\bar{K} \leq_{tt} K \text{ Jung } \bar{K}$; denn für $f(x) := ((2x+1), \alpha)$ mit α als der einstelligen

$$\text{Booleschen Identität gilt: } x \in \bar{K} \iff 2x+1 \in K \text{ Jung } \bar{K} \iff c_{K \text{ Jung } \bar{K}}(2x+1) = 1 \iff$$

$$\iff \alpha(c_{K \text{ Jung} \bar{K}}^{(2x+1)})=1 \iff f(x) \text{ von } K \text{ Jung} \bar{K} \text{ erfüllt.}$$

(iii) $K \text{ Jung} \bar{K} \leq_{tt} K \times \bar{K}$; denn für

$$f(x) := \begin{cases} ((\langle \frac{x}{2}, y_0 \rangle), \alpha), & \text{wenn } x \text{ gerade;} \\ ((\langle z_0, \frac{x-1}{2} \rangle), \alpha), & \text{wenn } x \text{ ungerade} \end{cases}$$

mit $y_0 \in \bar{K}$, $z_0 \in K$ fest, und α als Identität auf I gilt für alle x :

$$x \in K \text{ Jung} \bar{K} \iff (x \text{ gerade} \& \frac{x}{2} \in K) \text{ oder } (x \text{ ungerade} \& \frac{x-1}{2} \in \bar{K}) \iff$$

$$\iff (x \text{ gerade} \& \langle \frac{x}{2}, y_0 \rangle \in K \times \bar{K}) \text{ oder } (x \text{ ungerade} \& \langle z_0, \frac{x-1}{2} \rangle \in K \times \bar{K}) \iff$$

$$\iff (x \text{ gerade} \& c_{K \times \bar{K}}(\langle \frac{x}{2}, y_0 \rangle)=1) \text{ oder } (x \text{ ungerade} \& c_{K \times \bar{K}}(\langle z_0, \frac{x-1}{2} \rangle)=1)$$

$$\iff (x \text{ gerade} \& \alpha(c_{K \times \bar{K}}(\langle \frac{x}{2}, y_0 \rangle))=1) \text{ oder } (x \text{ ung.} \& \alpha(c_{K \times \bar{K}}(\langle z_0, \frac{x-1}{2} \rangle))=1)$$

$$\iff (x \text{ gerade} \& f(x) \text{ von } K \times \bar{K} \text{ erfüllt}) \text{ oder } (x \text{ ung. und } f(x) \text{ von } K \times \bar{K} \text{ erf.})$$

$$\iff f(x) \text{ von } K \times \bar{K} \text{ erfüllt.}$$

(iv) $K \times \bar{K} \leq_{tt} K$; denn für $f(x) = ((\pi_1(x), \pi_2(x)), \alpha)$ mit $\alpha: I \times I \rightarrow I$, $\alpha(1,0) = 1$

und $\alpha(0,0) = \alpha(0,1) = \alpha(1,1) = 0$ gilt: $x \in K \times \bar{K} \iff \pi_1(x) \in K \& \pi_2(x) \in \bar{K}$

$$\iff c_K(\pi_1(x))=1 \& c_K(\pi_2(x))=0 \iff \alpha(c_K(\pi_1(x)), c_K(\pi_2(x)))=1 \iff f(x) \text{ von } K$$

erfüllt.-

Aus (i) bis (iv) folgt nun mittels der Transitivität von $\leq_{tt}$ die Behauptung.

Aber nicht nur in bezug auf die tt -Äquivalenz von K und $\bar{K}$, - auch was die tt -Äquivalenz von $K \text{ Jung} \bar{K}$ und $K \times \bar{K}$ betrifft, ist Satz 4 der Spezialfall eines allgemeineren, nun folgenden Satzes.

Satz 5: $A \neq \emptyset \neq E \implies A \text{ Jung} E \leq_{tt} A \times B$.

Beweis: Sei $A \neq \emptyset \neq B$.

Statt $A \text{ Jung} E \leq_{tt} A \times B$ so umständlich wie in (ii) des Beweises von Satz 4

zu zeigen, verweisen wir diesmal auf §3.3, Satz 6 (i) (S.74), wo wir zum Be-

weis von $K \text{ Jung} \bar{K} \leq_1 K \times \bar{K}$ außer $K \neq \emptyset \neq \bar{K}$ keine spezielle Eigenschaft von K benötig-

ten.- Zum Nachweis von $A \times B \leq_{tt} A \text{ Jung} E$ definiere $f(x) = ((2\pi_1(x), 2\pi_2(x)+1), \alpha)$

mit $\alpha: I \times I \rightarrow I$, $\alpha(1,1) = 1$ und $\alpha(0,0) = \alpha(0,1) = \alpha(1,0) = 0$ (vgl. dazu

unsere Wahrheitstafel-Illustration mit $A=K$ und $E=\bar{K}$ (S.92)). Dann gilt:

$$x \in A \times E \iff \pi_1(x) \in A \& \pi_2(x) \in E \iff 2\pi_1(x) \in A \text{ Jung} E \& 2\pi_2(x)+1 \in A \text{ Jung} E \iff$$

$$\iff c_{A \text{ Jung} E}(2\pi_1(x))=c_{A \text{ Jung} E}(2\pi_2(x)+1)=1 \iff \alpha(c_{A \text{ Jung} E}(2\pi_1(x)), c_{A \text{ Jung} E}(2\pi_2(x)+1))=1$$

$$\iff tt\text{-Bedingung } f(x) \text{ von } A \text{ Jung} E \text{ erfüllt. Q.e.d.}$$

Als nächstes einige Bemerkungen zur algebraischen Struktur der tt -Reduzierbarkeitsordnung. Wie im Fall der m -Reduzierbarkeit besitzen auch in bezug auf $\leq_{tt}$ je zwei Grade eine kleinste obere Schranke.

Satz 6: Die tt -Reduzierbarkeitsordnung ist ein oberer Halbverband.

Beweis: Wegen $A \leq_m A \text{ Jung} B$ sowie $B \leq_m A \text{ Jung} B$, und folglich $A \leq_{tt} A \text{ Jung} E$

sowie $B \leq_{tt} A \text{ Jung} E$, ist $d_{tt}(A \text{ Jung} B)$ eine obere Schranke von $d_{tt}(A)$ und $d_{tt}(B)$

(für beliebige A, B). Um zu zeigen, daß $d_{tt}(A \text{ Jung} B)$ die kleinste obere Schranke von $d_{tt}(A)$ und $d_{tt}(B)$ ist, müssen wir zeigen, daß, wenn $A \leq_{tt} C$ und

$B \leq_{tt} C$, dann auch $A \text{ Jung} B \leq_{tt} C$ für jedes C .

Setze also $A \leq_{tt} C$ via f , d.h.: $x \in A \iff C$ erfüllt $f(x)$; sowie $B \leq_{tt} C$ via g , d.h.: $x \in B \iff C$ erfüllt $g(x)$. Definiere

$$h(x) := \begin{cases} f(\frac{x}{2}), & \text{wenn } x \text{ gerade;} \\ g(\frac{x-1}{2}), & \text{wenn } x \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Dann ist aufgrund der Rekursivität von f und g auch h rekursiv, und es gilt:

$$\begin{aligned} x \in A \text{ Jung } P &\iff (x \text{ gerade} \ \& \ \frac{x}{2} \in A) \text{ oder } (x \text{ ungerade} \ \& \ \frac{x-1}{2} \in B) \iff \\ &\iff (h(x)=f(\frac{x}{2}) \ \& \ \frac{x}{2} \in A) \text{ oder } (h(x)=g(\frac{x-1}{2}) \ \& \ \frac{x-1}{2} \in B) \iff \\ &\iff (h(x)=f(\frac{x}{2}) \ \& \ C \text{ erfüllt } f(\frac{x}{2})) \text{ oder } (h(x)=g(\frac{x-1}{2}) \ \& \ C \text{ erfüllt } g(\frac{x-1}{2})) \iff \\ &\iff C \text{ erfüllt } h(x); \text{ also } A \text{ Jung } B \leq_{tt} C \text{ via } h. \quad \text{Q.e.d.} \end{aligned}$$

Betrachte nun für eine feste Menge B die Klasse aller auf B tt -reduzierbaren Mengen, i.e. $\mathcal{L}_{tt}(B) := \{A \mid A \leq_{tt} B\}$. Dann ist $\mathcal{L}_{tt}(B)$ abgeschlossen gegenüber Vereinigungs-, Durchschnitts- und Komplementbildung; d.h. für je zwei auf B tt -reduzierbare Mengen A_1 und A_2 gilt, daß auch $A_1 \cup A_2$, $A_1 \cap A_2$ und $\bar{A}_1$ jeweils auf B tt -reduzierbar sind.

Satz 7: Für jedes P bildet $\mathcal{L}_{tt}(B)$ eine Boolesche Algebra.

Beweis: Seien A_1, A_2 mit $A_1 \leq_{tt} P$ via f_1 und $A_2 \leq_{tt} B$ via f_2 gegeben; es gilt also: $x \in A_1 \iff B$ erfüllt $f_1(x) = ((x_1, \dots, x_n), \alpha)$, sowie: $x \in A_2 \iff B$ erfüllt $f_2(x) = ((y_1, \dots, y_m), \beta)$.

(i) Definiere $f(x) = ((x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m), \alpha + \beta)$ mit

$$\alpha + \beta(z_1, \dots, z_n, z_{n+1}, \dots, z_{n+m}) = \max\{\alpha(z_1, \dots, z_n), \beta(z_{n+1}, \dots, z_{n+m})\}.$$

Dann gilt: $x \in A_1 \cup A_2 \iff x \in A_1$ oder $x \in A_2 \iff B$ erfüllt $f_1(x)$, oder B erfüllt $f_2(x) \iff \alpha(c_P(x_1), \dots, c_P(x_n)) = 1$ oder $\beta(c_P(y_1), \dots, c_P(y_m)) = 1 \iff$

$$\iff \max\{\alpha(c_P(x_1), \dots, c_P(x_n)), \beta(c_P(y_1), \dots, c_P(y_m))\} = 1 \iff$$

$$\iff \alpha + \beta(c_P(x_1), \dots, c_P(x_n), c_P(y_1), \dots, c_P(y_m)) = 1 \iff B \text{ erfüllt } f(x); \text{ also}$$

$$A_1 \cup A_2 \leq_{tt} B \text{ via } f.$$

(ii) $\mathcal{L}$ ist abgeschlossen bzgl. " $\cap$ ":

Definiere $g(x) = ((x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m), \alpha \cdot \beta)$ mit

$$\alpha \cdot \beta(z_1, \dots, z_n, z_{n+1}, \dots, z_{n+m}) = \min\{\alpha(z_1, \dots, z_n), \beta(z_{n+1}, \dots, z_{n+m})\}.$$

Dann gilt: $x \in A_1 \cap A_2 \iff x \in A_1$ und $x \in A_2 \iff B$ erfüllt $f_1(x)$ und $f_2(x) \iff$

$$\iff \alpha(c_P(x_1), \dots, c_P(x_n)) = 1 \text{ und } \beta(c_P(y_1), \dots, c_P(y_m)) = 1 \iff$$

$$\iff \min\{\alpha(c_P(x_1), \dots, c_P(x_n)), \beta(c_P(y_1), \dots, c_P(y_m))\} = 1 \iff$$

$$\iff \alpha \cdot \beta(c_P(x_1), \dots, c_P(x_n), c_P(y_1), \dots, c_P(y_m)) = 1 \iff B \text{ erfüllt } g(x); \text{ also}$$

$$A_1 \cap A_2 \leq_{tt} B \text{ via } g.$$

(iii) $\mathcal{L}$ ist abgeschlossen bzgl. Komplementbildung:

Nach Voraussetzung gilt $A_1 \leq_{tt} P$. Nach Satz 2 gilt $\bar{A}_1 \leq_{tt} A_1$.

Aus beidem folgt vermöge der Transitivität von $\leq_{tt}$, daß $\bar{A}_1 \leq_{tt} B$.

Satz 8: Jeder tt -Grad enthält genau abzählbar unendlich viele Elemente.

Beweis: Sei $d_{tt}(A)$ gegeben. Dann gilt für jede Menge P aus $d_{tt}(A)$, daß $P \leq_{tt} A$ via f für eine rekursive Funktion f . Da es nur abzählbar unendlich viele rekursive Funktionen gibt, kann es auch höchstens abzählbar unendlich viele sol-

he Mengen B geben. - Bleibt zu zeigen, daß es auch mindestens so viele gibt. Sei dazu o.B.d.A. $A \neq \emptyset$, $\bar{A} \neq \emptyset$ und $\bar{A}$ unendlich (andernfalls ist A rekursiv, und $d_{tt}(A)$ enthält nach Satz 3 alle abzählbar unendlich vielen rekursiven Mengen). Wir zeigen, daß für alle z gilt: $A \cup \{z\} \equiv_{tt} A$, und folgern daraus die Behauptung. - Sei o.B.d.A. $z \notin A$; $x_0 \in A$, $x_1 \in \bar{A} \setminus \{z\}$. Definiere für alle x die tt -Bedingung

$$f(x) = \begin{cases} ((x), \alpha), & \text{falls } x \neq z; \\ ((x_0), \alpha), & \text{falls } x = z; \end{cases} \quad \text{mit } \alpha \text{ als der einstelligen Booleschen Identität.}$$

Dann gilt für alle x : $x \in A \cup \{z\} \iff x \in A$ oder $x = z \iff (x \in A \ \& \ x \neq z) \text{ oder } x = z \iff$
 $\iff (f(x) = ((x), \alpha) \ \& \ c_A(x) = 1) \text{ oder } (f(x) = ((x_0), \alpha) \ \& \ c_A(x_0) = 1) \iff A \text{ erfüllt } f(x);$

Also $A \cup \{z\} \leq_{tt} A$ via f . - Entsprechend gilt mit der tt -Bedingung

$$g(x) = \begin{cases} ((x), \alpha), & \text{falls } x \neq z; \\ ((x_1), \alpha), & \text{falls } x = z; \end{cases} \quad \text{mit } \alpha \text{ wie zuvor}$$

- für alle x : $x \in A \iff x \in A \ \& \ \text{insbesondere } x \neq z \iff g(x) = ((x), \alpha) \ \& \ \alpha(c_A(x)) = 1 \iff$

$\iff (g(x) = ((x), \alpha) \ \& \ \alpha(c_{A \cup \{z\}}(x)) = 1) \text{ oder } (g(x) = ((x_1), \alpha) \ \& \ \alpha(c_{A \cup \{z\}}(x_1)) = 1) \iff$

$\iff g(x) \text{ von } A \cup \{z\} \text{ erfüllt; also } A \leq_{tt} A \cup \{z\} \text{ via } g. \text{ Insgesamt: } A \cup \{z\} \equiv_{tt} A$

für alle z . - Da $\bar{A}$ nach Voraussetzung unendlich ist, gibt es unendlich viele paarweise verschiedene Mengen $A \cup \{z\}$ mit $z \in \bar{A}$, und folglich enthält $d_{tt}(A)$ mindestens abzählbar unendlich viele Mengen.

Zusammen folgt, daß $d_{tt}(A)$ genau abzählbar unendlich viele Mengen enthält. Q.e.d.

Satz 9: Jeder nicht-rekursive tt -Grad enthält eine Menge, die nicht rekursiv aufzählbar ist und auch kein rekursiv aufzählbares Komplement besitzt.

Beweis: Sei wieder $d_{tt}(A)$ beliebig gegeben, doch $d_{tt}(A)$ nicht-rekursiv. Wir unterscheiden zwei Fälle:

(i) $d_{tt}(A)$ ist rekursiv aufzählbar. Sei $B \in d_{tt}(A)$ rekursiv aufzählbar, also B insbesondere nicht rekursiv. Da nach Satz 4 (in dessen Beweis die besondere Gestalt von K nicht berücksichtigt wurde!) $B \equiv_{tt} B \text{ jung } \bar{B}$, liegt auch $B \text{ jung } \bar{B}$ in $d_{tt}(A)$. Nun ist (da andernfalls $\bar{B}$ rekursiv aufzählbar, also B rekursiv) weder $B \text{ jung } \bar{B}$ noch $\overline{B \text{ jung } \bar{B}} = \bar{B} \text{ jung } B$ rekursiv aufzählbar.

(ii) $d_{tt}(A)$ ist nicht rekursiv aufzählbar, d.h. $d_{tt}(A)$ enthält keine einzige rekursiv aufzählbare Menge. Da wegen Satz 2 $B \equiv_{tt} \bar{B}$ für alle Mengen B , liegt für alle B aus $d_{tt}(A)$ auch $\bar{B}$ in $d_{tt}(A)$, d.h. die Behauptung gilt für alle B aus $d_{tt}(A)$. Q.e.d.

§4.3 tt-Reduzierbarkeit und m-Reduzierbarkeit; tt-Zylinder

Wie wir schon in §4.1 intuitiv eingesehen - und in §4.2 formal nachgewiesen - haben, unterscheiden sich $\leq_m$ und $\leq_{tt}$ im Fall dieser eigens deswegen herangezogenen, dabei aber ausschließlich nicht rekursiv aufzählbaren Mengen. Daß dies jedoch auch für die rekursiv aufzählbaren gilt, und es insbesondere sogar tt-vollständige Mengen gibt, die nicht m-vollständig sind, ergibt sich als Korollar zu dem folgenden Satz, der auf Post(1944) zurückgeht. Wir folgen dem Beweis in Rogers(1967).

Satz 1 (Post): Es gibt eine Menge, die sowohl schlicht als auch tt-vollständig ist.

Beweis: Sei S die schlichte Menge, wie sie im Beweis von Satz 1, §3.4, konstruiert wurde. Dabei war festzustellen, daß für jedes $k \in \mathbb{N}$ höchstens k Zahlen aus $\{0, 1, \dots, 2k\}$ in S vorkommen können. Daher muß jede Teilmenge von $\{0, 1, \dots, 2k\}$, welche aus $k+1$ Zahlen besteht, $\bar{S}$ schneiden, d.h. insbesondere jede der Mengen $\{0\}$ ($k=0$), $\{1, 2\}$ ($k=1$), $\{3, 4, 5, 6\}$ ($k=3$), $\{7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14\}$ ($k=7$), $\{15, 16, \dots, 30\}$ ($k=15$), ..., $\{2^n-1, \dots, 2^{n+1}-2\}$ (für $n \geq 0$). Also gilt für $S_x = \{2^x-1, \dots, 2^{x+1}-2\}$, daß $S_x \cap \bar{S} \neq \emptyset$ für alle $x \in \mathbb{N}$.

Definiere nun $S^* = S \cup (\bigcup_{x \in \mathbb{K}} S_x)$. Wir zeigen, daß S^* schlicht ist.

(i) Um zu zeigen, daß S^* rekursiv aufzählbar ist, genügt es zu zeigen, daß $\bigcup_{x \in \mathbb{K}} S_x$ rekursiv aufzählbar ist. Bilde dazu zu einer Aufzählung $x_0, x_1, \dots$ von $\mathbb{K}$ effektiv die - endlichen - Mengen $S_{x_0}, S_{x_1}, \dots$ und zähle nacheinander deren Elemente auf: $2^{x_0}-1, \dots, 2^{x_0+1}-2, 2^{x_1}-1, \dots, 2^{x_1+1}-2, 2^{x_2}-1, \dots$. Um - formaler - $\bigcup_{x \in \mathbb{K}} S_x = \text{domain } \psi$ für eine partiell rekursive Funktion ψ zu zeigen, definiere

$$\psi(z) := \begin{cases} 1, & \text{falls } \exists y [\varphi_y(y) \text{ definiert} \ \& \ z \in S_y]; \\ \text{undefiniert}, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Um für beliebiges z den Wert $\psi(z)$ zu berechnen, suche das y mit $z \in S_y$. Da $(S_x)_{x \in \mathbb{N}}$ eine Zerlegung von $\mathbb{N}$, ist dieses eindeutig bestimmt (und effektiv zu ermitteln). Für dieses berechne $\varphi_y(y)$. Ist dieser Wert definiert, so gilt $\psi(z) = 1$; sonst ist $\psi(z)$ undefiniert. Also ist ψ partiell rekursiv, und es gilt für alle z : $z \in \text{domain } \psi \Leftrightarrow \exists y [\varphi_y(y) \text{ definiert} \ \& \ z \in S_y] \Leftrightarrow \exists y [y \in \mathbb{K} \ \& \ z \in S_y] \Leftrightarrow z \in \bigcup_{x \in \mathbb{K}} S_x$. Das heißt $\text{domain } \psi = \bigcup_{x \in \mathbb{K}} S_x$.

(ii) Da $S_x \cap \bar{S} \neq \emptyset$ für alle x , gibt es insbesondere zu jedem $x \in \mathbb{K}$ ein $y \in S_x \cap \bar{S}$. Da $S_{x_1} \cap S_{x_2} = \emptyset$ für alle $x_1 \neq x_2$, d.h. die Folge der S_x disjunkt ist, kann solch ein y nicht gleichzeitig in einem S_x mit $x \in \mathbb{K}$ liegen; also $y \notin \bigcup_{x \in \mathbb{K}} S_x$. Insgesamt also $y \in \bar{S} \cap \overline{\bigcup_{x \in \mathbb{K}} S_x} = \bar{S} \cap \overline{\bigcup_{x \in \mathbb{K}} S_x} = \bar{S}^*$. Und da zu je zwei verschiede-

nen $x_1, x_2 \in \bar{K}$ auch die entsprechenden $y_1, y_2 \in \bar{S}^*$ verschieden sind, muß, da $\bar{K}$ unendlich, auch $\bar{S}^*$ unendlich sein.

(iii) Da $S \subset S^*$, also $\bar{S} \subset \bar{S}^*$, ist $\bar{S}^*$ als unendliche Teilmenge einer freien Menge, nämlich $\bar{S}$, selbst frei. (Denn jede unendliche rekursiv aufzählbare Teilmenge von $\bar{S}^*$ wäre auch Teilmenge von $\bar{S}$).

Aus (i), (ii) und (iii) folgt, daß S^* schlicht ist. -

Um die tt-Vollständigkeit von S^* zu zeigen, genügt es zu zeigen, daß $K \leq_{tt} S^*$. Denn da für jede rekursiv aufzählbare Menge A $A \leq_m K$, also auch $A \leq_{tt} K$, folgt dann, daß $A \leq_{tt} S^*$. - Wir finden zu gegebenem x die erwünschte tt-Bedingung, indem wir von der - unserer Konstruktion nach offenbar gültigen - Äquivalenz " $x \in K \iff S \subset S^*$ " ausgehen. Definiere nämlich für belichiges x :

$f(x) := ((2^x - 1, \dots, 2^{x+1} - 2), \alpha)$ mit $\alpha(w_1, \dots, w_m) = 1 \iff w_1 = w_2 = \dots = w_m = 1$.

Dann ist $f(x)$ eine tt-Bedingung mit der Norm $m_x = 2^{x+1} - 2 - (2^x - 1) + 1 = 2^{x+1} - 2^x = 2^x$, und es gilt: $x \in K \iff S_x = \{2^x - 1, \dots, 2^{x+1} - 2\} \subset S^* \iff 2^x - 1, \dots, 2^{x+1} - 2 \in S^* \iff c_{S^*}(2^x - 1) = \dots = c_{S^*}(2^{x+1} - 2) = 1 \iff \alpha(c_{S^*}(2^x - 1), \dots, c_{S^*}(2^{x+1} - 2)) = 1 \iff S^*$ erfüllt $((2^x - 1, \dots, 2^{x+1} - 2), \alpha) = f(x)$; also $K \leq_{tt} S^*$ via f . -

Damit ist S^* als schlicht und tt-vollständig gezeigt, und der Satz bewiesen.

Korollar: Es gibt eine Menge, die tt-vollständig, aber nicht m-vollständig ist.

Also unterscheiden sich $\equiv_m$ und $\equiv_{tt}$ (bzw. $\leq_m$ und $\leq_{tt}$) auf den rekursiv aufzählbaren Mengen.

Beweis: Wähle S^* aus dem Beweis des Satzes. S^* ist tt-vollständig, aber, da schlicht, nach §3.4, Satz 2 (ii), nicht m-vollständig. Da $K \leq_{tt} S^*$, wie oben gezeigt, sowie - da K m-vollständig und S^* rekursiv aufzählbar - $S^* \leq_m K$, also auch $S^* \leq_{tt} K$, gilt $K \equiv_{tt} S^*$. Da andererseits $K \not\equiv_m S^*$ (sonst S^* m-vollständig), folgt die Behauptung.

In §3.3 führten wir - nach der Definition von Myhill und Rogers - den Begriff des Zylinders ein, um die Struktur eines m-Grades in Abhängigkeit von seinen teilbildenden 1-Graden genauer zu bestimmen. Ganz ähnlich verfahren wir nun bei dem Problem, etwas über die Struktur eines tt-Grades relativ zu seinen m- bzw. 1-Graden als Komponenten auszusagen. Die entsprechende Definition findet sich in Rogers(1967) (S.112).

Definition: Für alle Mengen B sei

$B^{tt} = \{x \mid x \text{ ist eine tt-Bedingung, die von } B \text{ erfüllt wird}\}.$

Eine Menge A heißt tt-Zylinder, wenn $A \equiv B^{tt}$ für ein $B \in M$.

A^{tt} heißt die tt-Zylindrifizierung von A .

Wieder erscheint " $\equiv$ " anstelle von " $=$ ", um die rekursive Invarianz des Begriffs zu gewährleisten. Denn falls A ein tt-Zylinder, etwa $A \equiv B^{tt}$, und $A \equiv C$ für ein C , so folgt aufgrund der Transitivität von " $\equiv$ ", daß $C \equiv B^{tt}$, d.h. auch C ein tt-Zylinder ist. - Obwohl nun der Begriff des tt-Zylinders

bei unseren Untersuchungen der Beziehung von $\leq_{tt}$ und $\leq_m$ die gleiche Rolle spielen wird wie der des Zylinders bei denen der Beziehung von $\leq_m$ und $\leq_1$, so ist er doch weit weniger anschaulich als jener. Da $x \in B^{tt} \iff B$ erfüllt $x \iff \iff x = ((x_1, \dots, x_k), \alpha)$ mit $\alpha: I^k \rightarrow I$ und $\alpha(c_B(x_1), \dots, c_B(x_k)) = 1$, gilt $A \leq_{tt} B$ via f (beliebig rekursiv) genau dann, wenn $x \in A \iff f(x) \in B^{tt}$. Also umfaßt im Fall von $A \leq_{tt} B$ via f B^{tt} die Menge der Funktionswerte der Elemente von A , d.h. $f(A) \subset B^{tt}$. Als Lemma stellen wir fest, daß

jeder tt -Zylinder ein Zylinder ist, und verwenden es dann, um einen zu Satz 3, §3.3, analogen Satz zu beweisen. Satz 4 besagt, daß es Zylinder gibt, welche keine tt -Zylinder sind. Zuvor aber ein Satz, der Satz 2 aus §3.3 entspricht.

Satz 2: (a) $A \leq_1 A^{tt}$ für alle A .

(b) $A^{tt} \leq_{tt} A$ (und daher $A \equiv_{tt} A^{tt}$) für alle A .

Beweis: (a) Definiere für alle x

$f(x) := ((x), \alpha)$ mit α als der Booleschen Identität.

Dann ist f rekursiv und injektiv, und es gilt: $x \in A \iff c_A(x) = 1 \iff \iff \alpha(c_A(x)) = 1 \iff A$ genügt $f(x) \iff f(x) \in A^{tt}$; d.h. $A \leq_1 A^{tt}$ via f .

(b) Definiere $f(x) := x$, also $f = id$. Dann gilt für alle x : $x \in A^{tt} \iff \iff A$ erfüllt $x \iff A$ erfüllt $f(x)$; also $A^{tt} \leq_{tt} A$ via f .

Lemma: A tt -Zylinder $\implies A$ Zylinder.

Beweis: Sei A ein tt -Zylinder, $A \equiv B^{tt}$. Wir zeigen, daß die hinreichende und notwendige Bedingung von Satz 7, §3.3, erfüllt ist. Das heißt, wir müssen zu jeder nichtleeren endlichen Teilmenge D_x von B^{tt} (bzw. $\overline{B^{tt}}$) effektiv eine Zahl aus $B^{tt} \setminus D_x$ (bzw. $\overline{B^{tt}} \setminus D_x$) konstruieren. Sei daher D_x gegeben mit $D_x \subset B^{tt}$, und der tt -Bedingung $((x_1, \dots, x_n), \alpha) \in D_x$ - so daß also $\alpha(c_B(x_1), \dots, c_B(x_n)) = 1$. Bilde nun die tt -Bedingung $g(x) := ((x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_m), \beta)$, wobei $x_{n+1}, \dots, x_m$ beliebig, und $\beta: I^m \rightarrow I$ mit $\beta(w_1, \dots, w_m) = \alpha(w_1, \dots, w_n)$. Da D_x endlich, läßt sich $g(x)$ so formen, daß $g(x) \notin D_x$; dabei ist $g(x) \in B^{tt}$. - Ist hingegen $D_x \subset \overline{B^{tt}}$, so wende das beschriebene Verfahren auf eine beliebige, aber feste tt -Bedingung aus D_x an. Da wir zu jeder beliebigen tt -Bedingung effektiv unendlich viele solcher "längeren" tt -Bedingungen, welche durch genau dieselben Mengen erfüllt werden, finden können, führt dieses Verfahren immer zum Ziel. Also hat g die gewünschten Eigenschaften. Damit ist B^{tt} ein Zylinder, und folglich aufgrund der rekursiven Invarianz auch A .

Satz 3 aus §3.2 charakterisierte die Zylinder als genau die Mengen, auf welche eine Menge genau dann 1-reduzierbar ist, wenn sie m -reduzierbar auf sie ist. Das Analogon dazu ist der folgende Satz: Die tt -Zylinder sind genau die Mengen, auf welche eine Menge genau dann tt -reduzierbar ist, wenn sie 1-reduzierbar auf sie ist.

Satz 3: A tt -Zylinder $\iff \forall [\Gamma \leq_{tt} A \implies \Gamma \leq_1 A]$.

Beweis: " $\Rightarrow$ ": Sei A ein tt -Zylinder, $A \equiv C^{tt}$, und $B \leq_{tt} A$. Wegen $B \leq_{tt} C^{tt}$ und $C^{tt} \leq_{tt} C$ (nach Satz 2 (b)) gilt dann $B \leq_{tt} C$, d.h. es existiert eine rekursive Funktion f derart, daß für alle x : $x \in B \iff C$ erfüllt $f(x) \iff f(x) \in C^{tt}$. Also gilt $P \leq_m C^{tt}$ via f . Da C^{tt} nach Lemma ein Zylinder, folgt mit Satz 3, §3.3, daß $B \leq_1 C^{tt}$. Also auch $B \leq_1 A$.

$\Leftarrow$ ": Gelte für alle B : $B \leq_{tt} A \implies P \leq_1 A$. Betrachte die tt -Zylindrifizierung von A . Nach Satz 2 (b) gilt $A^{tt} \leq_{tt} A$, also nach Voraussetzung $A^{tt} \leq_1 A$. Da nach Satz 2 (a) $A \leq_1 A^{tt}$, folgt $A \equiv_1 A^{tt}$, und damit nach Myhill $A \equiv A^{tt}$. Dann aber ist A per definitionem ein tt -Zylinder. Q.e.d.

Aus Satz 2 zusammen mit Satz 3 folgt, daß jeder tt -Grad einen maximalen l -Grad - und daher auch einen maximalen m -Grad - enthält. Dieser entsteht durch tt -Zylindrifizierung einer beliebigen Menge des tt -Grades. Sei nämlich $d_{tt}(A)$ beliebig, und $B \in d_{tt}(A)$. Dann ist $d_1(P^{tt})$ der maximale l -Grad in $d_{tt}(A)$. Denn nach Satz 2 gilt $B \equiv_{tt} B^{tt}$, also liegt auch B^{tt} in $d_{tt}(A)$. Sei nun C aus $d_{tt}(A)$. Dann gilt $C \leq_{tt} B \leq_{tt} B^{tt}$, d.h. $C \leq_{tt} B^{tt}$, und damit nach Satz 3 $C \leq_1 B^{tt}$.

Satz 4: Es gibt Zylinder, die keine tt -Zylinder sind.

Beweis: Wähle den Zylinder $\bar{K} \times \mathbb{N}$. Dann gilt $K \leq_{tt} \bar{K} \times \mathbb{N}$ via $f(x) = ((\langle x, 0 \rangle), \alpha)$ mit $\alpha: I \rightarrow I, \alpha(0)=1$ und $\alpha(1)=0$. Denn für alle x erhält man: $x \in K \iff x \notin \bar{K} \iff (x, 0) \notin \bar{K} \times \mathbb{N} \iff c_{\bar{K} \times \mathbb{N}}(\langle x, 0 \rangle) = 0 \iff \alpha(c_{\bar{K} \times \mathbb{N}}(\langle x, 0 \rangle)) = 1 \iff f(x)$ von $\bar{K} \times \mathbb{N}$ erfüllt. Andererseits gilt $K \not\leq_1 \bar{K} \times \mathbb{N}$. Denn angenommen, $K \leq_1 \bar{K} \times \mathbb{N}$ via f . Dann ist $f^{-1}(\overline{\bar{K} \times \mathbb{N}}) = f^{-1}(K \times \mathbb{N}) = \bar{K}$, also $\bar{K}$ rekursiv aufzählbar (da $K \times \mathbb{N}$ rekursiv aufzählbar - Widerspruch! Folglich ist $\bar{K} \times \mathbb{N}$ nach Satz 3 kein tt -Zylinder.

Wie die m -Reduzierbarkeitsordnung, so spiegelt sich auch die tt -Reduzierbarkeitsordnung auf natürliche Weise in der l -Ordnung: Eine Menge ist auf eine andere genau dann tt -reduzierbar, wenn für ihre tt -Zylindrifizierungen das Entsprechende bzgl. $\leq_1$ gilt.

Satz 5: $A \leq_{tt} B \iff A^{tt} \leq_1 B^{tt}$ (für alle A, B).

Beweis: " $\Rightarrow$ ": Gelte $A \leq_{tt} B$. Da $A^{tt} \leq_{tt} A$ nach Satz 2 (b), und $B \leq_1 B^{tt}$ nach Satz 2 (a), folgt daraus, daß $A^{tt} \leq_{tt} B^{tt}$; und daher, da B^{tt} ein tt -Zylinder, nach Satz 3 $A^{tt} \leq_1 B^{tt}$.

$\Leftarrow$ ": Gelte $A^{tt} \leq_1 B^{tt}$. Dann folgt aus $A \leq_1 A^{tt} \leq_1 B^{tt} \leq_{tt} B$ (wie oben) $A \leq_{tt} B$. Q.e.d.

Der kanonische Homomorphismus A von der tt -Ordnung in die l -Ordnung bildet somit jeden tt -Grad $d_{tt}(A)$ einer Menge A auf den l -Grad $d_1(A^{tt})$ ihrer tt -Zylindrifizierung ab. Es gilt daher: $A \equiv_{tt} B \iff A^{tt} \equiv_1 B^{tt}$; d.h. $d_{tt}(A) = d_{tt}(B) \iff d_1(A^{tt}) = d_1(B^{tt})$. Beachte, daß, falls A nicht rekursiv, A^{tt}

nicht rekursiv aufzählbar ist. Denn da wegen $A \equiv_{tt} \bar{A}$ sowohl $A \leq_1 A^{tt}$, als auch $\bar{A} \leq_1 A^{tt}$, ist, falls A^{tt} rekursiv aufzählbar, sowohl A als auch $\bar{A}$ rekursiv aufzählbar, also A rekursiv. Somit sind die nicht-rekursiven 1-Grade, welche bei diesem Homomorphismus $\mathcal{A}$ als Bilder auftreten, auch nicht rekursiv aufzählbar.

Korollar: Für alle A sind äquivalent: (i) A tt-Zylinder;

$$(ii) A^{tt} \leq_1 A;$$

$$(iii) A \equiv A^{tt}.$$

Beweis: "(i) $\Rightarrow$ (ii)": Falls A ein tt-Zylinder, folgt, da $A^{tt} \leq_{tt} A$, mit Satz 3, daß $A^{tt} \leq_1 A$.

"(ii) $\Rightarrow$ (iii)": Da stets $A \leq_1 A^{tt}$, gilt, falls $A^{tt} \leq_1 A$, daß $A \equiv_1 A^{tt}$, also nach Myhill $A \equiv A^{tt}$.

"(iii) $\Rightarrow$ (i)": $A \equiv A^{tt} \Rightarrow A$ per definitionem tt-Zylinder.

Satz 6: (a) A tt-Zylinder $\Rightarrow A \equiv \bar{A}$.

(b) $A \equiv \bar{A} \not\Rightarrow$ (i.a.) A tt-Zylinder.

Beweis: (a) Sei A ein tt-Zylinder. Dann folgt, da nach §4.2, Satz 2, $\bar{A} \leq_{tt} A$, mit Satz 3, daß $\bar{A} \leq_1 A$. Sei etwa $\bar{A} \leq_1 A$ via f , d.h. für alle x : $x \in \bar{A} \Leftrightarrow f(x) \in A$. Dann gilt wegen $x \in A \Leftrightarrow x \notin \bar{A} \Leftrightarrow f(x) \notin A \Leftrightarrow f(x) \in \bar{A}$ (für alle x) auch $A \leq_1 \bar{A}$ via f . Also $A \equiv_1 \bar{A}$, und damit nach Myhill $A \equiv \bar{A}$.

(b) Gegenbeispiel: Wähle $A = \text{Kjung}\bar{K}$.

Definiere die rekursive Permutation f durch

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{falls } x \text{ gerade;} \\ x-1, & \text{falls } x \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Dann ist $f(\text{Kjung}\bar{K}) = \overline{\text{Kjung}\bar{K}}$, denn für alle x gilt: $x \in f(\text{Kjung}\bar{K}) \Leftrightarrow x=y+1$ mit y gerade und $y \in \text{Kjung}\bar{K}$, oder $x=y-1$ mit y ungerade und $y \in \text{Kjung}\bar{K} \Leftrightarrow x=y+1$ mit y gerade und $\frac{y}{2} \in K$, oder $x=y-1$ mit y ungerade und $\frac{y-1}{2} \in \bar{K} \Leftrightarrow x$ ungerade und $\frac{x-1}{2} \in K$, oder x gerade und $\frac{x}{2} \notin K \Leftrightarrow$ es gilt nicht: x gerade und $\frac{x}{2} \in K$, oder x ungerade und $\frac{x-1}{2} \in \bar{K} \Leftrightarrow x \notin \text{Kjung}\bar{K} \Leftrightarrow x \in \overline{\text{Kjung}\bar{K}}$. - Also $\text{Kjung}\bar{K} \equiv \overline{\text{Kjung}\bar{K}}$ via f .

Andererseits ist $\text{Kjung}\bar{K}$ kein tt-Zylinder. Dazu genügt es nach Satz 3 zu zeigen, daß es eine Menge B gibt derart, daß zwar $B \leq_{tt} \text{Kjung}\bar{K}$, nicht aber $B \leq_1 \text{Kjung}\bar{K}$. Wähle $B = K \times \bar{K}$. Dann gilt nach Satz 6 $K \times \bar{K} \leq_{tt} \text{Kjung}\bar{K}$, jedoch nicht $K \times \bar{K} \leq_1 \text{Kjung}\bar{K}$ (vgl. §4.2, Satz 6 (ii)). q.e.d.

§4.4 Ungenügen der tt-Reduzierbarkeit

Wie aus der Implikationskette: $A \leq_1 B \implies A \leq_m B \implies A \leq_{tt} B$ (für alle Mengen A, B) hervorgeht, ist die tt-Reduzierbarkeit die bisher allgemeinste Präzisierung des intuitiven Begriffs von Reduzierbarkeit, von dem wir ausgegangen sind. Können wir daraus den Schluß ziehen, daß wir in ihrer Gestalt bereits die allgemeinste Präzisierung dessen gewonnen haben, was wir unter "Reduzierbarkeit" im intuitiven Sinn verstanden (– i.e. daß sich ausgehend von einem Verfahren zur Berechnung der charakteristischen Funktion c_B von B ein Verfahren zur Berechnung der charakteristischen Funktion c_A von A gewinnen läßt)? Anders ausgedrückt: Sind alle im intuitiven Verständnis des Begriffs aufeinander reduzierbaren Mengen auch aufeinander tt-reduzierbar, – oder gibt es möglicherweise Fälle von Mengen A und B derart, daß zwar A intuitiv auf B reduzierbar, nicht aber $A \leq_{tt} B$ ist? In der Tat kommt die positive Antwort auf den zweiten Teil dieser Frage einigermaßen überraschend. Betrachte nämlich die Menge

$\tilde{K} = \{x \mid \exists y [\varphi_x(x) = y \text{ \& die tt-Bedingung } y \text{ wird von } K \text{ erfüllt}]\}$; i.e. die Menge all der Elemente von K , deren Werte unter der partiell rekursiven Funktion, deren rekursiv aufzählbarer Index sie sind, aufgefaßt als tt-Bedingungen, von K erfüllt werden. Wir zeigen, daß, obgleich $\tilde{K}$ nicht tt-reduzierbar auf K ist, dies doch für den intuitiven Begriff von Reduzierbarkeit sehr wohl der Fall ist.

Satz 1: $\tilde{K} \not\leq_{tt} K$.

Beweis: Indirekt.

Angenommen, $\tilde{K} \leq_{tt} K$. Dann gilt nach §4.2, Satz 2, daß auch $\tilde{\tilde{K}} \leq_{tt} K$. Sei etwa $\tilde{\tilde{K}} \leq_{tt} K$ vermöge der Reduktionsfunktion f mit dem rekursiv aufzählbaren Index x_0 . Dann folgt für eben dies x_0 : $x_0 \in \tilde{\tilde{K}} \iff$ tt-Bedingung $f(x_0)$ von K erfüllt $\iff$ tt-Bedingung $\varphi_{x_0}(x_0)$ von K erfüllt $\iff x_0 \in \tilde{K}$. Aus diesem Widerspruch ist ersichtlich, daß $\tilde{\tilde{K}} \leq_{tt} K$ nicht gelten kann.

Satz 2: $\tilde{K}$ ist im intuitiven Sinn auf K reduzierbar.

Beweis: Angenommen, wir haben die Möglichkeit, K zu entscheiden. Entscheiden wollen wir dann für beliebiges z , ob $z \in \tilde{K}$ oder nicht. Sei daher z beliebig gegeben. Wir prüfen zuerst, ob $z \in K$, und unterscheiden die zwei Fälle. Wenn $z \notin K$, d.h. $\varphi_z(z)$ undefiniert, dann liegt z per definitionem nicht in $\tilde{K}$. Wenn hingegen $z \in K$, also $\varphi_z(z)$ definiert, so läßt sich $\varphi_z(z)$ berechnen und alsdann prüfen, ob $\varphi_z(z)$ als tt-Bedingung von K erfüllt wird oder nicht. Denn für $\varphi_z(z) = ((x_1, \dots, x_n), \alpha)$ mit gegebener Boolescher Funktion $\alpha: I^n \rightarrow I$ können wir, da K nach Voraussetzung rekursiv, die Werte $c_K(x_1), \dots, c_K(x_n)$, und damit auch $\alpha(c_K(x_1), \dots, c_K(x_n))$ berechnen. Gilt $\alpha(c_K(x_1), \dots, c_K(x_n)) = 1$, also $\varphi_z(z)$ von K erfüllt, dann ist per definitionem $z \in \tilde{K}$; ist $\alpha(c_K(x_1), \dots, c_K(x_n)) = 0$, so ist $z \notin \tilde{K}$.

$= 0$, also $\varphi_z(z)$ nicht von K erfüllt, so $z \notin \tilde{K}$. Also ist $\tilde{K}$ entscheidbar. Q.e.d.

Wenngleich also die Methode, daß wir, um für ein beliebiges x zu entscheiden, ob $x \in \tilde{K}$, lediglich eine endliche Zahl von Fragen nach Elementschafft in K zu beantworten haben, prinzipiell im Einklang mit der Idee der tt-Reduzierbarkeit steht, ist $\tilde{K}$ dennoch nicht tt-reduzierbar auf K . Bei der Frage nun, wodurch sich unser Verfahren bei der intuitiven Reduktion im Beweis von Satz 2 von dem der tt-Reduktionen eigentlich unterscheidet, ist nach genauerem Hinsehen festzustellen, daß wir, um $z \in \tilde{K}$ zu entscheiden, die notwendigen Fragen an K - i.e. nach den Werten $c_K(x_1), \dots, c_K(x_n)$ - nicht, wie in allen Beispielen von tt-Reduzierbarkeit, im voraus - d.h. noch bevor wir irgendwelche anderen Fragen über K beantwortet haben - festgelegt haben. Vielmehr benützten wir, nachdem wir zuvor "z $\in K$?" entschieden hatten, die Beantwortung dieser Frage, um erst hierauf zu bestimmen, welche weiteren Fragen zu beantworten waren. Dies stellt, wie unsere Demonstration von $\tilde{K} \not\leq_{tt} K$ in Satz 1 beweist, einen offenbar ganz wesentlichen Unterschied der Methoden dar. So werden wir, ehe wir (in Kapitel VII) zur Definition des neuen allgemeineren - und dann, vermöge einer Relativierten These von Church, tatsächlich allgemeinsten - Reduzierbarkeitsbegriffs gelangen, vorab unser Vorgehen bei der intuitiven Reduktion im Beweis von Satz 2 - in Gestalt des sogenannten "relativen Algorithmus" - präzisieren müssen.-

Vorerst aber gehen wir, wie schon nach der ersten Behandlung der m-Reduzierbarkeit in Kapitel II, die entgegengesetzte Richtung, um - analog der Beschränkung von $\leq_m$ auf $\leq_1$ in Kapitel III - auch noch den Begriff zu diskutieren, der sich ergibt, wenn wir $\leq_{tt}$ auf eine gewisse Art beschränken. Kapitel VI bringt zudem noch eine Variante desselben.

KAPITEL V: Beschränkte Wahrheitstafel-Reduzierbarkeit

5.1 Motivation und Definition; Eigenschaften

In §4.3 ergab sich als Korollar zu Satz 1, daß $\equiv_m$ und $\equiv_{tt}$ (bzw. $\leq_m$ und $\leq_{tt}$) sich auch auf den rekursiv aufzählbaren Mengen unterscheiden. Zuerst lag Posts Konstruktion einer gleichzeitig schlichten und tt -vollständigen Menge. Dabei zeigten wir die tt -Vollständigkeit von S^X , wie wir sie nannten, mithilfe der wahrheitsfunktionalen Reduktion von K auf sie. Als Norm der zu einem beliebigen x gehörigen tt -Bedingung $f(x) = ((2^x - 1, \dots, 2^{x+1} - 2), \infty)$ ergab sich die Zahl $m_x = 2^x$, die mit wachsendem x exponentiell, d.h. sehr schnell ansteigt. Da sie so über alle Grenzen wächst, ist die Norm der tt -Bedingungen nicht beschränkt; mit anderen Worten: es gibt keine Zahl m derart, daß für alle x die tt -Bedingung eine Norm $\leq m$ hat. Wir hätten daher, umgekehrt betrachtet, die tt -Reduktion von K auf S^X in der Form nicht durchführen können, wenn wir für die Normen der entsprechenden tt -Bedingungen die Existenz solch einer oberen Schranke m gefordert hätten. Die Vermutung, die sich hieraus ergibt, ist, daß wir, die tt -Reduzierbarkeit solcherart im buchstäblichen Sinn des Begriffs "beschränkend", zu einem von ihr echt verschiedenen Reduzierbarkeitsbegriff gelangen. Dies erkannte bereits Post, der zum einen bewies, daß, die Existenz einer solchen Schranke vorausgesetzt, keine kreative Menge auf eine schlichte Menge tt -reduziert werden kann, und zum andern für den Fall unbeschränkter tt -Reduzierbarkeit als Gegenbeispiel zeigte, daß zu jeder kreativen Menge C eine schlichte Menge S so zu konstruieren ist, daß $C \leq_{tt} S$ (vgl. Post(1944), a.a.O. S.301-305). So reicht auch diese Definition auf ihn zurück: "If the orders of the truth-tables arising in such a reduction are bounded, we shall say that S_1 is reducible to S_2 by bounded truth-tables. Since there are 2^{2^v} distinct truth-tables of order v , reducibility by bounded truth-tables is equivalent to reducibility by truth-tables in which but a finite number of distinct truth-tables arise" ("Sind die Ordnungen der Wahrheitstafeln, die bei solch einer Reduktion auftreten, beschränkt, so sagen wir, daß S_1 auf S_2 durch beschränkte Wahrheitstafeln reduzierbar ist. Da es 2^{2^v} verschiedene Wahrheitstafeln der Ordnung v gibt, ist die Reduzierbarkeit durch beschränkte Wahrheitstafeln gleichbedeutend mit der Reduzierbarkeit durch Wahrheitstafeln, bei der nur eine endliche Zahl verschiedener Tafeln auftritt" (ebd. S.301)).

Definition: A heißt beschränkt wahrheitstafel-reduzierbar (bzw. beschränkt wahrheitsfunktional reduzierbar) auf B (in Zeichen: $A \leq_{btt} B$, von engl. "bounded truth-table"), wenn es eine rekursive Funktion f und eine Zahl m gibt derart, daß für alle x gilt: tt -Bedingung $f(x)$ hat Norm $\leq m$, und $x \in A$

$\Leftrightarrow B$ erfüllt $f(x)$.

In diesem Fall sagen wir: $A \leq_{\text{btt}} B$ via f (oder vermöge f).

Kurz sprechen wir von "btt-Reduzierbarkeit".

Bevor wir Beispiele betrachten, wollen wir uns wieder dessen versichern, daß auch diese Definition eine gültige Präzisierung des intuitiven Reduzierbarkeitsbegriffs darstellt. Da jede beschränkt wahrheitsfunktionale Reduktion insbesondere natürlich eine wahrheitsfunktionale ist, folgt, daß, falls $A \leq_{\text{btt}} B$ via f , und B rekursiv, auch $A \leq_{\text{tt}} B$ via f , und B rekursiv, und daraus, wie in §4.2 (S.95) gezeigt, die Rekursivität von A .

Bleibt zu zeigen, daß $\leq_{\text{btt}}$ reflexiv und transitiv. Sei dazu die Menge A beliebig gegeben. Dann ist, wie im Fall von $\leq_{\text{tt}}$ gezeigt (ib. S.95), $A \leq_{\text{tt}} A$ via f mit $f(x) = ((x), \alpha)$ mit α als der einstelligen Booleschen Identität, und folglich $A \leq_{\text{btt}} A$ mit durch die Zahl 1 beschränkter Norm.

Gilt schließlich $A \leq_{\text{btt}} B$, sowie $B \leq_{\text{btt}} C$ mit Normen, die durch m_1 bzw. m_2 beschränkt sind, so folgt - entsprechend unserer Konstruktion im Fall von $\leq_{\text{tt}}$ (vgl. S.96) -, daß $A \leq_{\text{btt}} C$ mit durch die Zahl $m_1 \cdot m_2$ beschränkter Norm. Denn da unter dieser Voraussetzung für alle Normen m der tt-Bedingungen $f(x) = ((y_1, \dots, y_m), \alpha)$ $m \leq m_1$, sowie für alle Normen n_1 der tt-Bedingungen $g(y_1)$ $n_1 \leq m_2$ (für $1 \leq i \leq m$) gilt, können die $n_1 + n_2 + \dots + n_m$ Zahlen z_{ij} der tt-Bedingungen $h(x)$ (mit $1 \leq i \leq m$ und $1 \leq j \leq n_1$) nicht mehr als $(m_2 + m_2 + \dots + m_2)$ -viele (mit m Summanden, wobei $m \leq m_1$), also nicht mehr als $m \cdot m_2$ -viele, und folglich höchstens $m_1 \cdot m_2$ -viele sein. Ergo sind die Normen von $h(x)$ durch $m_1 \cdot m_2$ beschränkt. - Damit sind Reflexivität und Transitivität von $\leq_{\text{btt}}$ bewiesen, wodurch die folgenden Definitionen kanonisch gerechtfertigt sind.

Definition: $A \equiv_{\text{btt}} B \Leftrightarrow A \leq_{\text{btt}} B \text{ \& } B \leq_{\text{btt}} A$.

Bezeichnung: A btt-äquivalent mit B .

Die Äquivalenzklassen von $\leq_{\text{btt}}$, d.h. die Klassen der Gestalt $d_{\text{btt}}(A) := \{B \mid A \equiv_{\text{btt}} B\}$, heißen kurz btt-Grade.

Definition: A heißt vollständig in bezug auf $\leq_{\text{btt}}$ (bzw. btt-vollständig), wenn (i) A rekursiv aufzählbar;

(ii) $\forall B [B \text{ rekursiv aufzählbar} \Rightarrow B \leq_{\text{btt}} A]$.

Als Beispiele für btt-Reduzierbarkeit können wir, nachdem bei jenen für tt-Reduzierbarkeit - mit Ausnahme der bereits im Rahmen der Motivation von $\leq_{\text{btt}}$ erwähnten tt-Reduktion von K auf S^* - keine unbeschränkten Normen aufgetreten sind, eben diese heranziehen. Mit anderen Worten: fast alle bisherigen tt-Reduktionen erweisen sich im nachhinein als btt-Reduktionen! So gilt entsprechend Satz 4 von §4.2: $K \equiv_{\text{btt}} \bar{K} \equiv_{\text{btt}} K \text{ Jung } \bar{K} \equiv_{\text{btt}} K \times \bar{K}$. Denn für die tt-Bedingung $f(x) = ((x), \alpha)$ mit $\alpha: I \rightarrow I$, $\alpha(0)=1$ und $\alpha(1)=0$ für jedes x hat $f(x)$ die Norm ≤ 1 , und es gilt: $x \in K \Leftrightarrow c_{\bar{K}}(x)=0 \Leftrightarrow \alpha(c_{\bar{K}}(x))=1 \Leftrightarrow \bar{K}$ genügt

(x) ; also $K \leq_{\text{btt}} \bar{K}$ via f . Da in (ii) des Beweises von Satz 4, §4.2, $f(x) = ((2x+1), \alpha)$ die Norm ≤ 1 hat, gilt $\bar{K} \leq_{\text{btt}} K \text{ Jung } \bar{K}$ via f . Da in (iii) desselben Beweises $f(x) = ((\langle \frac{x}{2}, y_0 \rangle), \alpha)$, wenn x gerade, und $f(x) = ((\langle z_0, \frac{x-1}{2} \rangle), \alpha)$, wenn x ungerade (wobei $y_0 \in \bar{K}, z_0 \in K$), also die Norm von $f(x)$ in jedem Fall ≤ 1 ist, gilt $K \text{ Jung } \bar{K} \leq_{\text{btt}} K \times \bar{K}$ via f . Und da schließlich ebendort in (iv) $f(x) = ((J_1(x), J_2(x)), \alpha)$ für jedes x die Norm ≤ 2 hat, gilt $K \times \bar{K} \leq_{\text{btt}} K$ via f . Mit Hilfe der Transitivität von $\leq_{\text{btt}}$ folgen dann die behaupteten Äquivalenzen. - Analog Satz 4 gilt auch Satz 5 aus §4.2 ohne Abstrich für $\leq_{\text{btt}}$: Wenn A und B beide nichtleer sind, dann $A \text{ Jung } B \equiv_{\text{btt}} A \times B$. Denn da $A \text{ Jung } B \leq_m A \times B$ nach §3.3, Satz 6 (i), in dessen Beweis auf die spezielle Gestalt von K keine Rücksicht zu nehmen war), gilt mit dem folgenden Satz 1 auch $A \text{ Jung } B \leq_{\text{btt}} A \times B$. Und da andererseits $f(x) = ((2J_1(x), 2J_2(x)+1), \alpha)$ mit $\alpha(0,0)=\alpha(0,1)=\alpha(1,0)=0$, sowie $\alpha(1,1)=1$ für alle x die Norm ≤ 2 hat, auch $A \times B \leq_{\text{btt}} A \text{ Jung } B$ via f . Dementsprechend lassen sich die übrigen Sätze von §4.2 ohne Änderung der Beweise von $\leq_{\text{tt}}$ auf $\leq_{\text{btt}}$ übertragen. Wir werden sie, beginnend bei Satz 1, der Vollständigkeit halber zitieren.

Satz 1: $A \leq_m B \implies A \leq_{\text{btt}} B$ (für alle A, B).

Beweis: Sei $A \leq_m B$ via f ; d.h. für alle x gilt: $x \in A \iff f(x) \in B$. Dann hat die tt-Bedingung $g(x) = ((f(x)), \alpha)$ mit α als der einstelligen Booleschen Identität für alle x die Norm ≤ 1 , und es gilt: $x \in A \iff f(x) \in B \iff \alpha(c_B(f(x))) = 1 \iff g(x)$ von B erfüllt. Also $A \leq_{\text{btt}} B$ via g .

Wenngleich elementar, ist Satz 1 dennoch von ziemlicher Wichtigkeit. Denn in Verbindung mit den vorausgegangenen Beispielen - wie etwa der btt-Äquivalenz von K und $\bar{K}$ - besagt er zum einen, daß $\leq_{\text{btt}}$ eine echte Verallgemeinerung von $\leq_m$ darstellt; zusammen mit der eingangs des Paragraphen - und in §5.2 bewiesenen - Vermutung aber auch, daß $\leq_{\text{btt}}$ weniger allgemein als $\leq_{\text{tt}}$ ist. Einem Ergebnis von Fischer zufolge (§5.3, Satz 1) unterscheiden sich $\leq_{\text{btt}}$ und $\leq_m$ auch auf den nicht-rekursiven, rekursiv aufzählbaren Mengen. Wir haben somit in Gestalt der beschränkt wahrheitsfunktionalen Reduzierbarkeit zwischen die Präzisierungen des Reduzierbarkeitsbegriffs als m -Reduzierbarkeit zum einen, als tt-Reduzierbarkeit zum andern, eine weitere geschoben, welche von diesen beiden auch auf den nicht-rekursiven, rekursiv aufzählbaren Mengen differiert.

Wie $\leq_{\text{tt}}$ unterscheidet sich $\leq_{\text{btt}}$ von $\leq_m$ weiterhin darin, daß alle Mengen A in demselben btt-Grad liegen wie ihr Komplement.

Satz 2: $A \leq_{\text{btt}} \bar{A}$ (und folglich $A \equiv_{\text{btt}} \bar{A}$) für alle A .

Beweis: Die tt-Bedingung $f(x) = ((x), \alpha)$ mit $\alpha(0)=1$ und $\alpha(1)=0$, vermöge welcher $A \leq_{\text{tt}} \bar{A}$ galt, hat für alle x die Norm ≤ 1 ; also $A \leq_{\text{btt}} \bar{A}$ via f . Aus $\bar{A} \leq_{\text{btt}} \bar{\bar{A}}$ folgt dann $A \equiv_{\text{btt}} \bar{A}$.

Schließlich gilt - im Gegensatz zu $\leq_m$ - auch schon für $\leq_{btt}$, daß eine rekursive Menge auf jede beliebige reduzierbar ist.

Satz 3: A rekursiv $\implies \forall B [A \leq_{btt} B]$.

Beweis: Im entsprechenden Beweis für $\leq_{tt}$ (S.98) hatte $f(x)$ für alle x die Norm ≤ 1 ; also $A \leq_{btt} B$ via f .

Wie die tt -, so besitzt auch die btt -Reduzierbarkeitsordnung als kleinsten Grad den der rekursiven Mengen. Denn nach Satz 3 fallen alle rekursiven Mengen in einen einzigen btt -Grad, welcher - nach demselben Satz - unter allen anderen btt -Graden liegt. - Auch der folgende Satz ergibt sich aus einem solchen Analogieschluß:

Satz 4: Die btt -Reduzierbarkeitsordnung bildet einen oberen Halbverband.

Beweis: Entsprechend dem Beweis von Satz 6, §4.2. Wegen $A \leq_m A \text{ Jung } B$ und $B \leq_m A \text{ Jung } B$ gilt $A \leq_{btt} A \text{ Jung } B$ und $B \leq_{btt} A \text{ Jung } B$. Ist nun $A \leq_{btt} C$ via f mit Norm $\leq m$, und $B \leq_{btt} C$ via g mit Norm $\leq n$, so hat die Funktion h , vermöge welcher $A \text{ Jung } B \leq_{tt} C$ (vgl. S.100), die Norm $\leq \max\{n, m\}$.

Satz 5: Für jede Menge B bildet $\mathcal{L}_{btt}(B) = \{A \mid A \leq_{btt} B\}$ eine Boolesche Algebra.

Beweis: Seien die Bezeichnungen wie im Beweis von Satz 7, §4.2 (S.100). Gilt $A_1 \leq_{btt} B$ via f_1 mit Norm $\leq m_1$ für alle x , sowie $A_2 \leq_{btt} B$ via f_2 mit Norm $\leq m_2$ für alle x , so folgt $A_1 \cup A_2 \leq_{btt} B$ via f mit Norm $\leq m_1 + m_2$ für alle x , sowie $A_1 \cap A_2 \leq_{btt} B$ via g mit Norm $\leq m_1 + m_2$ für alle x . Da außerdem $\bar{A}_1 \leq_{btt} A_1$ (Satz 2), folgt auch $\bar{A}_1 \leq_{btt} B$ vermöge der Transitivität von $\leq_{btt}$.

Satz 6: Jeder btt -Grad enthält genau abzählbar unendlich viele Mengen.

Beweis: Analog dem von Satz 8, §4.2, S.100f., da dort die Reduktionsfunktionen f und g , vermöge derer für alle z $A \cup \{z\} \equiv_{tt} A$ galt, für alle x eine Norm ≤ 1 hatten, weswegen auch $A \cup \{z\} \equiv_{btt} A$ für alle z .

Satz 7: Jeder nicht-rekursive btt -Grad enthält eine nicht rekursiv aufzählbare Menge mit nicht rekursiv aufzählbarem Komplement.

Beweis: Analog dem von Satz 9, §4.2, S.101, da bei der btt -Reduktion von K auf $K \text{ Jung } \bar{K}$, und umgekehrt, auf die spezielle Gestalt von K keine Rücksicht zu nehmen war, und folglich für eine beliebige rekursiv aufzählbare Menge B aus einem nicht-rekursiven btt -Grad $B \equiv_{btt} B \text{ Jung } \bar{B}$ gilt. Enthält ein btt -Grad jedoch keine rekursiv aufzählbare Menge, so gilt die Behauptung nach Satz 2 für alle seine Elemente.

5.2 btt- und tt-Reduzierbarkeit

Wie eingangs §5.1 bemerkt, unterscheidet $\leq_{btt}$ sich echt von $\leq_{tt}$; d.h. es kann für Mengen A, B $A \leq_{tt} B$ gelten, ohne daß auch $A \leq_{btt} B$ zu gelten braucht. Insbesondere zeigt der folgende, auf Post zurückgehende Satz - in Verbindung mit §4.3, Satz 1 -, daß die btt-vollständigen Mengen von den tt-vollständigen verschieden sind. Jede btt-vollständige Menge ist trivialerweise tt-vollständig. Es gibt aber tt-vollständige Mengen, die nicht btt-vollständig sind. Insbesondere kann keine btt-vollständige Menge schlicht sein. Um dies zu beweisen, benötigen wir das folgende Lemma.

Lemma: Sei für eine rekursiv aufzählbare Menge A $K \leq_{btt} A$ mit durch m beschränkter Norm. Dann gibt es eine unendliche rekursiv aufzählbare Menge von tt-Bedingungen $t_0, t_1, t_2, \dots$, jede mit Norm $\leq m$ und den zugeordneten Mengen $T_0, T_1, T_2, \dots$ derart, daß

- (i) für jedes i t_i von A erfüllt wird;
- (ii) für jedes i $T_i \cap \bar{A} \neq \emptyset$ ist; und
- (iii) für jedes i die Menge $\{j \mid T_j \cap \bar{A} = T_i \cap \bar{A}\}$ nicht mehr als 2^{m+1} Elemente enthält.

Beweis: Jede tt-Bedingung kann auf augenfällige Art durch eine aussagenlogische Formel, die aus Teilen der Form " $n \in X$ " (mit Zahlenvariablen n) besteht, dargestellt werden, wobei die Formel für jede Menge X genau dann wahr wird, wenn X die tt-Bedingung erfüllt; und umgekehrt liefert jede solche Formel eine tt-Bedingung. So kann beispielsweise die Formel " $4 \notin X \vee 17 \in X$ " mit der tt-Bedingung $((4, 17), \alpha)$ assoziiert werden, wobei α durch $\alpha(0, 0) := \alpha(0, 1) := \alpha(1, 1) := 1$ und $\alpha(1, 0) := 0$ definiert ist. Beachte dabei, daß mit jeder Formel irgendeine von unendlich vielen tt-Bedingungen (die den verschiedenen Wiederholungen und Permutationen im k -Tupel, sowie verschiedenen Werten von k entsprechen), und mit jeder tt-Bedingung eine von unendlich vielen äquivalenten Formeln verbunden werden kann. Wir nennen eine Formel aus einer Formelmenge *herleitbar*, wenn sie aussagenlogisch daraus herleitbar ist. Ebenso nennen wir eine tt-Bedingung aus einer Menge von tt-Bedingungen *herleitbar*, wenn dies für die entsprechenden Formeln gilt. Damit ist der Begriff der Herleitbarkeit für tt-Bedingungen - relativ zu der mannigfachen Entsprechung zwischen tt-Bedingungen und Formeln - wohldefiniert, und aufgrund der Widerspruchsfreiheit der Aussagenlogik muß, wenn die tt-Bedingung x aus einer Menge A von tt-Bedingungen herleitbar ist, jedes B , das alle tt-Bedingungen aus A erfüllt, auch x erfüllen. So ist zum Beispiel die tt-Bedingung $x := ((9, 17), \alpha)$ mit $\alpha(0, 0) = \alpha(0, 1) = \alpha(1, 1) = 1$ und $\alpha(1, 0) = 0$ aus den drei tt-Bedingungen $((4), \alpha_1)$ und $((9), \alpha_1)$ mit α_1 als der einstelligen Booleschen Identität, sowie $((4, 17), \alpha_2)$ mit $\alpha_2(0, 0) = \alpha_2(0, 1) = \alpha_2(1, 1) = 1$ und $\alpha_2(1, 0) = 0$ herleitbar, da die x entsprechende Formel " $9 \notin X \vee 17 \in X$ " aus den Formeln

" $4 \in X$ ", " $9 \in X$ " und " $4 \notin X \vee 17 \in X$ " herleitbar ist. Also ist $x = ((9, 17), \alpha)$ aus $A = \{((4), \alpha_1), ((9), \alpha_1), ((4, 17), \alpha_2)\}$ (mit $\alpha, \alpha_1, \alpha_2$ wie oben) herleitbar. Sei B eine Menge, die alle tt-Bedingungen aus A erfüllt, d.h. es gelte " $4 \in B$ ", " $9 \in B$ " und " $4 \notin B \vee 17 \in B$ ". Dann folgt aussagenlogisch, daß " $4 \in B$ ", " $9 \in B$ " und " $17 \in B$ ", insbesondere $c_B(9)=1$ und $c_B(17)=1$, also $\alpha(c_B(9), c_B(17))=1$, d.h. x ist von B erfüllt.

Da $\bar{K} \leq_{\text{btt}} K$ mit Schranke 1, und $K \leq_{\text{btt}} A$ mit Schranke m , folgt mit der Transitivität von $\leq_{\text{btt}}$, daß $\bar{K} \leq_{\text{btt}} A$ mit Schranke $m (=1 \cdot m)$. Gelte also $\bar{K} \leq_{\text{btt}} A$ via die Reduktionsfunktion f mit Schranke m , also für alle x : $x \in \bar{K} \iff f(x) = ((x_1, \dots, x_k), \alpha)$ von A erfüllt $\iff \alpha(c_A(x_1), \dots, c_A(x_k))=1$ ($k \leq m$). Wir konstruieren die effektiv aufzählbare Folge $t_0, t_1, \dots$ induktiv wie folgt. Zu t_0 : Betrachte die Menge C aller tt-Bedingungen, die Formeln der Gestalt " $x \in X$ " mit $x \in A$ entsprechen. Da A rekursiv aufzählbar, ist es auch C . Sei C_0 die Menge aller tt-Bedingungen, die aus tt-Bedingungen in C ableitbar sind. Mit C ist auch C_0 rekursiv aufzählbar. Sei $B_0 = f^{-1}(C_0) = \{x \mid f(x) \in C_0\}$, und x_0 ein rekursiv aufzählbarer Index für B_0 , also $B_0 = W_{x_0}$. Sei $t_0 = f(x_0)$. Zu t_{k+1} : Angenommen, für $k \geq 0$ sei t_k bereits definiert. Sei C_{k+1} die Menge aller tt-Bedingungen, die aus tt-Bedingungen von $C_k \cup \{t_k\}$ ableitbar sind. Dann ist mit C_k auch C_{k+1} rekursiv aufzählbar. Sei $B_{k+1} = f^{-1}(C_{k+1})$, und x_{k+1} ein rekursiv aufzählbarer Index für B_{k+1} , also $B_{k+1} = W_{x_{k+1}}$. Sei $t_{k+1} = f(x_{k+1})$. - Damit ist t_k für alle $k \in \mathbb{N}$ wohldefiniert.

Da jede tt-Bedingung aus einem der C_k trivialerweise aus C_k ableitbar ist, und die C_{k+1} aus Ableitungen von $C_k \cup \{t_k\}$ bestehen, gilt $C_k \subset C_{k+1}$ für alle $k \geq 0$, d.h. $C_0 \subset C_1 \subset C_2 \subset \dots$. Wir zeigen nun durch Induktion über k die Gültigkeit der Behauptungen (i) und (ii):

$k=0$: (1) Zu zeigen: A erfüllt t_0 . Dies ist wegen $\bar{K} \leq_{\text{btt}} A$ via f , und der Definition von t_0 gleichbedeutend damit, daß $x_0 \in \bar{K}$. Nun erfüllt A nach Definition von C alle tt-Bedingungen aus C , und folglich auch alle aus C_0 . Da wegen $\bar{K} \leq_{\text{btt}} A$ via f eine beliebige tt-Bedingung genau dann von A erfüllt wird, wenn ihr Urbild unter f in $\bar{K}$ liegt, gilt $f^{-1}(C_0) \subset \bar{K}$, d.h. $B_0 \subset \bar{K}$. Hieraus folgt, da B_0 rekursiv aufzählbar, und $\bar{K}$ erzeugend vermöge id als erzeugender Funktion, daß x_0 - als ein rekursiv aufzählbarer Index von B_0 - in $\bar{K} \setminus B_0$, also insbesondere in $\bar{K}$ liegt.

(2) Zu zeigen: $T_0 \cap \bar{A} \neq \emptyset$.

Indirekt. Angenommen, $T_0 \cap \bar{A} = \emptyset$. Dann folgt, da t_0 nach (1) von A erfüllt wird, daß $t_0 \in C_0$, also $x_0 = f^{-1}(t_0) \in f^{-1}(C_0) = B_0 = W_{x_0}$, d.h. $x_0 \in K$ - im Widerspruch zu $x_0 \in \bar{K}$ nach (1). - Beachte insbesondere, daß $t_0 \notin C_0$ gilt.

$k \rightarrow k+1$: (1) Unter der Voraussetzung, daß (i) und (ii) für alle $i \leq k$ gelten, und alle tt-Bedingungen aus C_k von A erfüllt werden, ist zu zei-

zeigen, daß t_{k+1} von A erfüllt wird. Da auch alle tt-Bedingungen aus C_{k+1} von A erfüllt werden, gilt $f^{-1}(C_{k+1}) \subset \bar{K}$, d.h. $B_{k+1} \subset \bar{K}$, und folglich, aufgrund der Produktivität von $\bar{K}$, $x_{k+1} \in \bar{K} \setminus B_{k+1}$. Also wird wegen $\bar{K} \leq_{\text{btt}} A$ via f die tt-Bedingung $f(x_{k+1}) = t_{k+1}$ von A erfüllt.

- (2) Unter der Voraussetzung, daß $T_1 \cap \bar{A} \neq \emptyset$ für alle $i \leq k$, ist zu zeigen, daß $T_{k+1} \cap \bar{A} \neq \emptyset$. Angenommen, $T_{k+1} \cap \bar{A} = \emptyset$. Da nach (1) t_{k+1} von A erfüllt, gilt $t_{k+1} \in C_0 \subset C_{k+1}$, d.h. $t_{k+1} \in C_{k+1}$, und folglich $f^{-1}(t_{k+1}) = x_{k+1} \in B_{k+1} = W_{k+1}$. Also $x_{k+1} \in K$ - im Widerspruch zu $x_{k+1} \in \bar{K}$ nach (1). Folglich $T_{k+1} \cap \bar{A} \neq \emptyset$. Beachte, daß $t_{k+1} \notin C_{k+1}$.

Insgesamt folgt durch vollständige Induktion die Gültigkeit der Behauptungen 1) und (ii) des Lemmas.

Zum Beweis von (iii) sei n_1 die Norm von t_1 (für beliebiges i). Betrachte für jedes i die tt-Bedingung t'_i , die aus t_i folgendermaßen entsteht. Die t'_i zugeordnete Menge bleibt T_i , und das n_1 -Tupel von t'_i erhält man, indem man das n_1 -Tupel von t_i in der Weise neu ordnet, daß zuerst die Elemente von $T_i \cap \bar{A}$ in monotoner Reihenfolge, und sodann die von $T_i \cap A$ (in beliebiger Ordnung) erscheinen. Durch entsprechende Neuordnung der Argumente der Booleschen Funktion von t_i erhält man die Boolesche Funktion von t'_i . So sind für jedes i die tt-Bedingungen t_i und t'_i äquivalent und wechselseitig voneinander ableitbar. Wie die tt-Bedingungen $t_0, t_1, \dots$, so haben auch alle $t'_0, t'_1, \dots$ eine Norm $\leq m$. Dabei braucht die Folge $t'_0, t'_1, \dots$ nicht rekursiv aufzählbar zu sein. - Um (iii) zu beweisen, beachte, daß es $2^2 + 2^2 + \dots + 2^{2^m} < 2^{2^{m+1}}$ verschiedene Boolesche Funktionen von m oder weniger Argumenten gibt. Angenommen nun, die Menge $\{j \mid T_j \cap \bar{A} = T_1 \cap \bar{A}\}$ habe für ein bestimmtes $i \in \mathbb{N}$ mehr als $2^{2^{m+1}}$ Elemente. Dann läßt es j_1 und j_2 aus der Menge mit $j_1 < j_2$ derart, daß t'_{j_1} und t'_{j_2} dieselbe Boolesche Funktion hätten, und $T_{j_1} \cap \bar{A} = T_{j_2} \cap \bar{A}$ wäre. Wir zeigen, daß dann t'_{j_2} aus $C \cup \{t'_{j_1}\}$ ableitbar wäre. Gelte $t'_{j_1} = ((a_1, \dots, a_r, b_{r+1}, \dots, b_{r+n}), \alpha)$ und $t'_{j_2} = ((a_1, \dots, a_r, c_{r+1}, \dots, c_{r+n}), \alpha)$ mit α als der beiden tt-Bedingungen gemeinsamen $(r+n)$ -stelligen Booleschen Funktion, $\{a_1, \dots, a_r\} = T_{j_1} \cap \bar{A} = T_{j_2} \cap \bar{A}$, und daher $\{b_{r+1}, \dots, b_{r+n}, c_{r+1}, \dots, c_{r+n}\} \subset A$. Sei M die Menge, die (a) alle tt-Bedingungen von C und (b) t'_{j_1} erfüllt. C enthält nach Definition alle $((b_k), \text{id})$ und $((c_k), \text{id})$ mit $r+1 \leq k \leq r+n$. Dann gilt nach (a) $b_k \in M$, $c_k \in M$, also $c_M(b_k) = c_M(c_k) = 1$. Es folgt $\alpha(c_M(a_1), \dots, c_M(a_r), c_M(b_{r+1}), \dots, c_M(b_{r+n})) = 1$ und $\alpha(c_M(a_1), \dots, c_M(a_r), c_M(c_{r+1}), \dots, c_M(c_{r+n})) = 1$, d.h. M erfüllt t'_{j_2} . - Daher wäre t'_{j_2} ableitbar aus $C \cup \{t'_{j_1}\}$ und folglich Element von $C_{j_1+1} \subset C_{j_2}$ - im Widerspruch zu $t_k \notin C_k$ für alle k ! Also kann $\{j \mid T_j \cap \bar{A} = T_1 \cap \bar{A}\}$ nicht mehr als $2^{2^{m+1}}$ Elemente enthalten.

Damit ist der Beweis des Lemmas vollständig.

Mithilfe des Lemmas beweisen wir nun den wesentlichen Satz dieses Paragraphen.

Satz 1: A btt-vollständig $\implies A$ nicht schlicht.

Beweis: Sei A btt-vollständig. Dann gilt insbesondere $K \leq_{\text{btt}} A$. Sei m eine Schranke für die Norm in der btt-Reduktion von K auf A , und $t_0, t_1, t_2, \dots$ eine - nach dem Lemma existierende - unendliche rekursiv aufzählbare Folge von tt-Bedingungen, jede mit Norm $\leq m$ und den zugeordneten Mengen $T_0, T_1, T_2, \dots$ derart, daß (i), (ii) und (iii) des Lemmas erfüllt. Wir zeigen, daß $\bar{A}$ eine unendliche rekursiv aufzählbare Teilmenge W enthält, und daher A nicht schlicht ist. - Definiere für jedes $i \in \mathbb{N}$ den Wert $s(i)$ als die Mächtigkeit der Menge $T_1 \cap \bar{A}$. Da die Mächtigkeit von $T_1 \leq m$ ist, und $T_1 \cap \bar{A} \neq \emptyset$, ist auch die Mächtigkeit von $T_1 \cap \bar{A}$ eine endliche Zahl $\leq m$, und somit für jedes i die Zahl $s(i)$ wohldefiniert mit $1 \leq s(i) \leq m$. Da $\bar{A}$ nicht rekursiv ist, braucht die Funktion s nicht rekursiv zu sein.

Sei nun q als die kleinste Zahl z definiert, so daß $s(i) = z$ für unendlich viele i . Da alle Werte von s unter der Zahl m liegen, muß es solch ein z geben. Also ist q wohldefiniert. Da dann jede Zahl $p < q$ Bild von höchstens endlich vielen Argumenten von s ist, gilt $s(i) < q$ nur für endlich viele i . Wähle eine Zahl i_0 , die größer ist als diese endlich vielen Argumente; dann gilt $s(i) \geq q$ für alle $i > i_0$. Erstelle nun eine Liste der - nach Voraussetzung rekursiv aufzählbaren - Menge A . Sobald nun alle außer q Elementen eines beliebigen T_1 (für $i > i_0$) in der Liste von A erscheinen, wissen wir, daß die verbleibenden q Elemente in $\bar{A}$ liegen müssen. Folglich liegen sie in $T_1 \cap \bar{A}$, und wir können eine Folge $j_0, j_1, \dots$ derart aufzählen, daß $i_0 \leq j_0 < j_1 \dots$ und $s(j_0) = s(j_1) = \dots = q$. Da wir für jedes j_1 ($i=0,1,2,\dots$) die Elemente von $T_j \cap \bar{A}$ ermitteln können, ist die Menge $W = \bigcup_{i=0}^{\infty} (T_{j_i} \cap \bar{A})$ rekursiv aufzählbar. Da $T_j \cap \bar{A} \subset \bar{A}$ für alle i , ist $W \subset \bar{A}$, und da nach (iii) des Lemmas für festes i die Gleichheit $T_{j_i} \cap \bar{A} = T_{j_k} \cap \bar{A}$ nur für endlich viele k gilt, muß W unendlich sein. Also enthält $\bar{A}$ die unendliche rekursiv aufzählbare Menge W .

Korollar: Es gibt eine Menge, die tt-vollständig, aber nicht btt-vollständig ist. Also unterscheiden sich $\equiv_{\text{btt}}$ und $\equiv_{\text{tt}}$ (bzw. $\leq_{\text{btt}}$ und $\leq_{\text{tt}}$) auf den rekursiv aufzählbaren Mengen.

Beweis: Betrachte S^* aus dem Beweis von Satz 1, §4.3 (S.102f.). S^* ist tt-vollständig, aber, weil schlicht, nach Satz 1 nicht btt-vollständig. Es gilt $K \equiv_{\text{tt}} S^*$, jedoch, da andernfalls S^* btt-vollständig wäre, $K \not\leq_{\text{btt}} S^*$. Da K und S^* rekursiv aufzählbar sind, folgt die Behauptung.

Damit hat sich unsere eingangs des Kapitels geäußerte Vermutung, daß die Beschränkung der Norm bei der tt-Reduzierbarkeit zu einem neuen, von ihr echt verschiedenen Reduzierbarkeitsbegriff führen würde, bestätigt. Was aber ergibt sich, wenn wir $\leq_{\text{btt}}$ nicht mit dem allgemeineren, sondern dem stärkeren Begriff, nämlich $\leq_m$, vergleichen? Mit anderen Worten: stellt, wie $\leq_{\text{tt}}$ von $\leq_{\text{btt}}$, so auch $\leq_{\text{btt}}$ eine echte Verallgemeinerung von $\leq_m$ dar? Dieser Frage gehen wir im folgenden Paragraphen nach.

5.3 btt- und m-Reduzierbarkeit

Da - nach §2.1, Satz 2 - $\mathbb{N}$ und $\emptyset$ m-unvergleichbar sind, folgt aus Satz 1, Satz 2, sofort, daß $\leq_m$ und $\leq_{btt}$ sich auf den rekursiv aufzählbaren Mengen unterscheiden. Der folgende, eingangs des Kapitels bereits angekündigte (vgl. S.111) Satz von Fischer zeigt, daß $\leq_m$ und $\leq_{btt}$ sich auch auf den nicht-rekursiven, rekursiv aufzählbaren Mengen unterscheiden.

Satz 1 (Fischer): Es gibt nicht-rekursive, rekursiv aufzählbare Mengen A und B derart, daß $A \leq_{btt} B$, nicht aber $A \leq_m B$.

Beweis: Aufgrund der Definition der btt-Reduzierbarkeit, bemerkt Fischer, sei klar, daß "for any set A and any $n \in \mathbb{N}$, $A^n \leq_{btt} A$ since $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in A^n \iff x_1 \in A \& x_2 \in A \& \dots \& x_n \in A$. Also, $A \leq_1 A^n$; thus, the bounded-truth-table degree of unsolvability containing a set A must contain A^n for all $n \in \mathbb{N}$ " ("für jede Menge A und jedes $n \in \mathbb{N}$ $A^n \leq_{btt} A$ gilt, da $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in A^n \iff x_1 \in A \& x_2 \in A \& \dots \& x_n \in A$. Ebenso gilt $A \leq_1 A^n$; also muß der btt-Unlösbarkeitsgrad, der eine Menge A enthält, auch A^n für alle $n \in \mathbb{N}$ enthalten" (Fischer(1963), a.a.O. S.875). Genauer gesagt, lautet die lt-Bedingung $f(x)$, vermöge welcher $A^n \leq_{btt} A$ gilt: $f(x) = ((x_1, x_2, \dots, x_n), \alpha)$ mit $\alpha: I^n \rightarrow I$, $\alpha(w_1, \dots, w_n) = 1$ genau dann, wenn $w_1 = \dots = w_n = 1$, sonst $= 0$; denn dann hat $f(x)$ für alle x die Norm n, und es gilt für alle $x_1, x_2, \dots, x_n$: $(x_1, \dots, x_n) \in A^n \iff c_A(x_1) = \dots = c_A(x_n) = 1 \iff \alpha(c_A(x_1), \dots, c_A(x_n)) = 1 \iff f(x)$ ist von A erfüllt. - Fischer wählt nun um einen die Menge S_1 aus Post(1944), a.a.O. S.304, die unserem S^* aus §4.3, Satz 1, entspricht, zum andern eine beliebige kreative Menge C. Dann gilt entsprechend der vorangehenden Bemerkung, daß $S^* \times S^* \leq_{btt} S^*$. - Wir spezialisieren C auf K und folgen weiter dem Beweis in Rogers(1967). Indirekt: Angenommen, $S^* \times S^* \leq_m S^*$ via die Reduktionsfunktion g, d.h. $\langle x, y \rangle \in S^* \times S^* \iff g(\langle x, y \rangle) \in S^*$ für alle $z = \langle x, y \rangle$. Nun gilt nach dem Beweis von Satz 1, §4.3, daß $x \in K \iff x \in S_x \subset S^*$ für alle x, wobei $S_x = \{2^x - 1, \dots, 2^{x+1} - 2\}$. Dann aber können wir K auf S^* wie folgt m-reduzieren. Definiere die Funktion f durch

$$\begin{aligned} f(0) &= 0; \\ f(1) &= g(\langle 1, 2 \rangle); \\ f(2) &= g(\langle g(3, 4), g(5, 6) \rangle); \\ f(3) &= g(\langle g(\langle g(7, 8), g(9, 10) \rangle), g(\langle g(11, 12), g(13, 14) \rangle) \rangle) \\ &\vdots \\ &\text{usw.} \end{aligned}$$

Dann ist f offenbar rekursiv, und es gilt für alle x: $x \in K \iff S_x \subset S^* \iff 2^{x-1}, 2^x, 2^{x+1}, \dots, 2^{x+1} - 3, 2^{x+1} - 2 \in S^* \iff \langle 2^{x-1}, 2^x \rangle \in S^* \times S^* \& \langle 2^{x+1}, 2^{x+2} \rangle \in S^* \times S^* \& \dots \& \langle 2^{x+1} - 3, 2^{x+1} - 2 \rangle \in S^* \times S^* \iff g(\langle 2^{x-1}, 2^x \rangle) \in S^* \& \dots \& g(\langle 2^{x+1} - 3, 2^{x+1} - 2 \rangle) \in S^* \iff g(\underbrace{g(\dots g(g(2^{x-1}, 2^x), g(2^{x+1}, 2^{x+2})), \dots, g(2^{x+1} - 3, 2^{x+1} - 2))}_{x\text{-mal}}) \in S^* \iff f(x) \in S^*$. (Für den Fall $x=3$ heißt

dies, ausgeschrieben: $3 \in K \Leftrightarrow S_3 \subset S^* \Leftrightarrow 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14 \in S^* \Leftrightarrow (7, 8), (9, 10), (11, 12), (13, 14) \in S^* \times S^* \Leftrightarrow \langle 7, 8 \rangle, \langle 9, 10 \rangle, \langle 11, 12 \rangle, \langle 13, 14 \rangle \in S^* \times S^* \Leftrightarrow \langle g(\langle 7, 8 \rangle), g(\langle 9, 10 \rangle), g(\langle 11, 12 \rangle), g(\langle 13, 14 \rangle) \rangle \in S^* \Leftrightarrow \langle g(\langle 7, 8 \rangle), g(\langle 9, 10 \rangle) \rangle, \langle g(\langle 11, 12 \rangle), g(\langle 13, 14 \rangle) \rangle \in S^* \times S^* \Leftrightarrow \langle g(\langle g(\langle 7, 8 \rangle), g(\langle 9, 10 \rangle) \rangle), g(\langle g(\langle 11, 12 \rangle), g(\langle 13, 14 \rangle) \rangle) \rangle \in S^* \Leftrightarrow \langle g(\langle g(\langle g(\langle 7, 8 \rangle), g(\langle 9, 10 \rangle) \rangle), g(\langle g(\langle 11, 12 \rangle), g(\langle 13, 14 \rangle) \rangle) \rangle) \rangle \in S^* \Leftrightarrow f(3) \in S^*.$ Also $K \subseteq_m S^*$ via f . Dann aber ist S^* m -vollständig, also auch btt-vollständig. Da S^* schlicht, ist dies ein Widerspruch zu Satz 1, §5.2.. Also folgt: $S^* \times S^* \not\subseteq_m S^*$. Q.e.d.

Korollar: $\equiv_{\text{btt}}$ und $\equiv_m$ unterscheiden sich auf den nicht-rekursiven, rekursiv aufzählbaren Mengen.

Beweis: Im Beweis von Satz 1 gilt der Bemerkung zufolge $S^* \times S^* \equiv_{\text{btt}} S^*$, nicht aber, wegen $S^* \times S^* \not\subseteq_m S^*$, $S^* \times S^* \equiv_m S^*$.

Im Vorausblick auf die Verallgemeinerung der tt-Reduzierbarkeit zur Turing-Reduzierbarkeit, die wir in Kapitel VII vornehmen werden, können wir mit Fischer resümieren: "Bounded-truth-table and truth-table reducibilities are shown by Post to be distinct relations over the recursively enumerable, non-recursive sets. (...) Dekker shows that one-one and many-one reducibilities differ on these sets and that truth-table and Turing reducibilities are distinct. (...) Since the five reducibilities given are linearly ordered under implication (if $A \leq_1 B$, then $A \leq_m B$, if $A \leq_m B$, then $A \leq_{\text{btt}} B$, etc.), the conclusion that all five reducibilities are distinct on the recursively enumerable, non-recursive sets will follow" ("Beschränkte Wahrheitstafel- und Wahrheitstafel-Reduzierbarkeit wurden von Post als auf den rekursiv aufzählbaren, nicht-rekursiven Mengen verschiedene Relationen erwiesen. (...) Dekker zeigt, daß sich 1- und m -Reduzierbarkeit auf diesen Mengen unterscheiden, und daß Wahrheitstafel- und Turing-Reduzierbarkeit verschieden sind. (...) Da die fünf vorliegenden Reduzierbarkeiten in bezug auf Implikation linear geordnet sind (wenn $A \leq_1 B$, dann $A \leq_m B$, wenn $A \leq_m B$, dann $A \leq_{\text{btt}} B$, etc.), ergibt sich als Folgerung, daß alle fünf Reduzierbarkeiten auf den rekursiv aufzählbaren, nicht-rekursiven Mengen verschieden sind" (Fischer(1963), a.a.O. S.875)).

Da die Menge S^* nicht btt-vollständig ist, ist sie trivialerweise auch nicht m -vollständig. Könnte es sein, daß jede btt-vollständige Menge bereits m -vollständig ist? Dies beantwortet Young(1963) negativ, indem er eine btt-vollständige Menge angibt und zeigt, daß sie nicht m -vollständig ist. Wir geben - mit Rogers(1967), S.177 - eine kurze Skizze des Beweises. Konstruiere dazu eine Menge A derart, daß $A \subset K$ und $A \equiv K \setminus A$, A aber kein Zylinder ist. Dann folgt, daß $K \leq_{\text{btt}} A$, und damit die btt-Vollständigkeit von A . Da kein Zylinder, ist A nicht m -vollständig. - Die Konstruktion von A verläuft

ie folgt. Definiere eine rekursive Permutation p derart, daß $p(K) = K$ und $\forall x [p(x) \neq x \ \& \ p(p(x)) = x]$; daneben eine rekursive Funktion g so, daß $\text{Rang } g = K$ und $\forall x [g(2x+1) = p(g(2x))]$. Beachte, daß es zu jedem Zylinder C eine rekursive injektive Funktion f gibt derart, daß $\forall x [f(x) \neq x \ \& \ [x \in C \Rightarrow f(x) \in C]]$. Mit Hilfe eines sog. Prioritätsarguments ist schließlich A so zu konstruieren, daß für A kein solches f existiert, wobei $A \subset K$ und $p(A) = K \setminus A$. -

Satz 2: Es gilt $A \times A \leq_{\text{btt}} A$ für alle A .

Beweis: Definiere für alle x die tt-Bedingung $f(x)$ durch $f(x) = ((\pi_1(x), \pi_2(x)), \alpha)$ mit $\alpha(1,1)=1$, sonst $=0$. Dann ist f rekursiv mit durch die Zahl 2 beschränkter Norm, und für alle x gilt: $x \in A \times A \iff \pi_1(x), \pi_2(x) \in A \iff c_A(\pi_1(x)) = c_A(\pi_2(x)) = 1 \iff \alpha(c_A(\pi_1(x)), c_A(\pi_2(x))) = 1 \iff A$ erfüllt $f(x)$. Also $A \times A \leq_{\text{btt}} A$ via f .

Da es nach Satz 1 eine rekursiv aufzählbare Menge A gibt mit $A \times A \not\leq_m A$, nämlich $A := S^*$, liefert Satz 2 ein weiteres Beispiel dafür, daß $\leq_m$ und $\leq_{\text{btt}}$ sich insbesondere auf den rekursiv aufzählbaren Mengen unterscheiden.

Satz 3: Es gibt nicht-rekursive, rekursiv aufzählbare Mengen A und B derart, daß $A \times B \not\leq_m \text{Ajung} B$.

Beweis: Wähle $A := B := S^*$. Dann haben A und B die gewünschten Eigenschaften. Denn angenommen, es gilt $S^* \times S^* \leq_m S^* \text{Ajung} S^*$; d.h. insbesondere $S^* \times S^* \leq_m S^* \text{Ajung} S^*$. Dann folgt wegen $S^* \text{Ajung} S^* \leq_m S^*$ (via $f(x) := \frac{x}{2}$, falls x gerade, und $= \frac{x-1}{2}$, falls x ungerade) aus der Transitivität von $\leq_m$, daß $S^* \times S^* \leq_m S^*$ - was nach dem Beweis von Satz 1 nicht richtig sein kann.

Satz 4: Zu jeder Menge A gibt es eine Menge B derart, daß $B \leq_{\text{btt}} A$, $A \leq_1 B$ und $B \equiv \bar{B}$.

Beweis: Zu beliebigem A definiere $B := \text{Ajung} \bar{A}$. Dann folgt:

i) Für die rekursive Funktion f , für alle x definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} ((\frac{x}{2}), \alpha) \text{ mit } \alpha = \text{id, falls } x \text{ gerade;} \\ ((\frac{x-1}{2}), \beta) \text{ mit } \beta(0)=1 \text{ und } \beta(1)=0, \text{ falls } x \text{ ungerade,} \end{cases}$$

gilt: $x \in \text{Ajung} \bar{A} \iff (x \text{ gerade} \ \& \ \frac{x}{2} \in A) \text{ oder } (x \text{ ungerade} \ \& \ \frac{x-1}{2} \in \bar{A}) \iff$
 $\iff (f(x) = ((\frac{x}{2}), \alpha) \ \& \ c_A(\frac{x}{2}) = 1) \text{ oder } (f(x) = ((\frac{x-1}{2}), \beta) \ \& \ c_A(\frac{x-1}{2}) = 0) \iff$
 $\iff (f(x) = ((\frac{x}{2}), \alpha) \ \& \ \alpha(c_A(\frac{x}{2})) = 1) \text{ oder } (f(x) = ((\frac{x-1}{2}), \beta) \ \& \ \beta(c_A(\frac{x-1}{2})) = 1) \iff$
 $\iff f(x) \text{ von } A \text{ erfüllt.} - \text{ Also gilt, da } f \text{ von der Norm 2, } \text{Ajung} \bar{A} \leq_{\text{btt}} A$
 via f .

ii) $A \leq_1 \text{Ajung} \bar{A}$ via $f(x) := 2x$.

iii) $\text{Ajung} \bar{A} \equiv \text{Ajung} \bar{A}$ vermöge der rekursiven Permutation f mit $f(x) = x+1$, wenn x gerade, und $f(x) = x-1$, wenn x ungerade. Denn es gilt für alle x :

$x \in \text{Ajung}\bar{A} \iff (x \text{ gerade} \ \& \ \frac{x}{2} \in A) \text{ oder } (x \text{ ungerade} \ \& \ \frac{x-1}{2} \in \bar{A}) \iff (x \text{ gerade} \ \& \ \frac{x}{2} \notin \bar{A}) \text{ oder } (x \text{ ungerade} \ \& \ \frac{x-1}{2} \notin A) \iff (x \text{ gerade} \ \& \ x+1 \notin \text{Ajung}\bar{A}) \text{ oder } (x \text{ ungerade} \ \& \ x-1 \notin \text{Ajung}\bar{A}) \iff f(x) \in \text{Ajung}\bar{A}. \quad \text{Q.e.d.}$

Bemerkung: Da der Begriff der Norm in die Definition der tt-Zylinder nicht einging, ist diese für $\leq_{tt}$ und $\leq_{btt}$ identisch. Bleibt allenfalls die Frage, inwieweit die einschlägigen Sätze aus §4.3 - einschließlich etwaiger Analogien - auch für $\leq_{btt}$ anstelle von $\leq_{tt}$ Gültigkeit behalten. Hierzu ist wieder nur zu prüfen, in welchen der entsprechenden Beweise tt-Reduktionen mit beschränkter Norm ausreichen. Dabei stellt sich jedoch heraus, daß bereits in (b) von Satz 2, §4.3, die Norm von $f(x)$ (vgl. S.104) keiner Beschränkung unterlag, weshalb i.a. noch nicht einmal $A^{tt} \leq_{btt} A$ zu gelten braucht. Umso weniger lassen sich die anschließenden Sätze analogisieren.-

Abschließend noch zwei Sätze zu der bereits in §3.5 (S.82ff.) in bezug auf m- und l-Reduzierbarkeit behandelten Struktur von Graden. Als Satz 1 (Dekker) zeigten wir dort, daß der m-Grad einer schlichten Menge eine unendliche Klasse von bzgl. $\leq_1$ (mit dem Ordnungstyp der ganzen Zahlen) linear geordneten 1-Graden umfaßt, bzw. - im dazugehörigen Korollar (S.83) - der m-Grad einer freien Menge unendlich viele 1-Grade enthält. Nach der Diskussion der Begriffe $\leq_{tt}$ und $\leq_{btt}$ können wir diese Untersuchungen nun auch auf jene ausdehnen. So befaßt sich der folgende Satz mit der Frage, wie viele m-Grade in einem gegebenen tt-Grad enthalten sind.

Satz 5:(Fischer): Der vollständige tt-Grad umfaßt eine lineare Ordnung von rekursiv aufzählbaren m-Graden mit dem Ordnungstyp der natürlichen Zahlen.

Beweis (nach Rogers(1967)): Sei S^* wie bisher. Betrachte die Mengen

$$A_0 := S^*;$$

$$A_1 := S^* \times S^*;$$

$$A_2 := S^* \times S^* \times S^* \times S^*;$$

$$\vdots$$

$$A_k := S^* \times S^* \times \dots \times S^* \quad (2^k \text{ Faktoren}).$$

Offenbar gilt $A_k \leq_1 A_{k+1}$ (für alle k) via $f(x) := \langle \pi_1(x), \pi_2(x), \dots, \pi_{2^k}(x), s, \dots \rangle$ (mit $s \in S^*$ fest; wobei s am Ende des 2^{k+1} -Tupels 2^k -mal auftritt); das heißt:

$$A_0 \leq_1 A_1 \leq_1 \dots \leq_1 A_k \leq_1 A_{k+1} \leq_1 \dots. \quad \text{Daneben gilt trivialerweise: } A_0 \equiv_{tt} A_1$$

$$\equiv_{tt} \dots \equiv_{tt} A_k \equiv_{tt} A_{k+1} \equiv_{tt} \dots$$

Es ist aber $A_j \not\leq_m A_1$ für $i < j$. Denn seien u und v gegeben mit $u < v$ und $A_v \leq_m A_u$. Dann läßt sich, wie aus dem Beweis von Satz 1 ersichtlich, eine rekursive Funktion f derart finden, daß für alle x gilt: $S_x \subset S^* \iff f(x) \in A_u$. Wie

Rogers verzichten wir auf eine allgemeine Definition von f und begnügen uns mit einem Beispiel. Angenommen etwa, $A_4 \leq_m A_2$ via h . Nach Definition gilt

$$A_4 = (S^*)^{16} \text{ und } A_2 = (S^*)^4. \text{ Dann definiere}$$

$$f(0) := \langle 0, 0, 0, 0 \rangle;$$

$$f(1) := \langle 1, 2, 1, 2 \rangle;$$

$$f(2) := \langle 3, 4, 5, 6 \rangle;$$

$$f(3) := h(\langle 7, 8, \dots, 14, 7, 8, \dots, 14 \rangle);$$

$$f(4) := h(\langle 15, 16, \dots, 30 \rangle);$$

$$f(5) := h(\langle w_1, \dots, w_{16} \rangle) \text{ mit } \langle w_1, \dots, w_4 \rangle = h(\langle 31, \dots, 46 \rangle), \langle w_5, \dots, w_8 \rangle = h(\langle 47, \dots, 62 \rangle), \langle w_9, \dots, w_{16} \rangle = \langle w_1, \dots, w_8 \rangle; \text{ usw.}$$

egen $x \in K \Leftrightarrow S_x \subset S^*$ gilt dann für alle x : $x \in K \Leftrightarrow f(x) \in A_2$. Zum Beispiel:

$$0 \in K \Leftrightarrow S_0 = \{0\} \subset S^* \Leftrightarrow 0 \in S^* \Leftrightarrow \langle 0, 0, 0, 0 \rangle = f(0) \in (S^*)^4 = A_2;$$

$$1 \in K \Leftrightarrow S_1 = \{1, 2\} \subset S^* \Leftrightarrow 1, 2 \in S^* \Leftrightarrow \langle 1, 2, 1, 2 \rangle = f(1) \in (S^*)^4 = A_2;$$

$$2 \in K \Leftrightarrow S_2 = \{3, 4, 5, 6\} \subset S^* \Leftrightarrow \langle 3, 4, 5, 6 \rangle = f(2) \in A_2;$$

$$3 \in K \Leftrightarrow S_3 = \{7, \dots, 14\} \subset S^* \Leftrightarrow \langle 7, \dots, 14, 7, \dots, 14 \rangle \in (S^*)^{16} = A_4 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow h(\langle 7, \dots, 14, 7, \dots, 14 \rangle) = f(3) \in A_2;$$

$$4 \in K \Leftrightarrow S_4 = \{15, \dots, 30\} \subset S^* \Leftrightarrow \langle 15, \dots, 30 \rangle \in A_4 \Leftrightarrow h(\langle 15, \dots, 30 \rangle) = f(4) \in A_2;$$

$$5 \in K \Leftrightarrow S_5 = \{31, \dots, 62\} \subset S^* \Leftrightarrow \langle 31, \dots, 46 \rangle \in A_4 \text{ \& } \langle 47, \dots, 62 \rangle \in A_4 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow h(\langle 31, \dots, 46 \rangle) \in A_2 \text{ \& } h(\langle 47, \dots, 62 \rangle) \in A_2 \Leftrightarrow \langle w_1, \dots, w_{16} \rangle \in A_4 \text{ mit } \\ \langle w_1, \dots, w_4 \rangle = h(\langle 31, \dots, 46 \rangle), \langle w_5, \dots, w_8 \rangle = h(\langle 47, \dots, 62 \rangle) \text{ und } \\ \langle w_9, \dots, w_{16} \rangle = \langle w_1, \dots, w_8 \rangle \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow h(\langle w_1, \dots, w_{16} \rangle) = f(5) \in A_2; \text{ usw.}$$

Also $K \subseteq_m A_2$ via f . Entsprechend allgemein: $K \subseteq_m A_u$.

nun $A_u \subseteq_{\text{btt}} S^*$, folgt $K \subseteq_{\text{btt}} S^*$, d.h. S^* ist btt-vollständig - im Widerspruch zu S^* schlicht. - Also gilt $A_j \not\subseteq_m A_i$ für $i < j$, und somit:

$$0 <_m A_1 <_m A_2 <_m \dots <_m A_k <_m A_{k+1} <_m \dots \text{ --}$$

Propollar: Es gibt einen btt-Grad, der eine lineare Ordnung von rekursiv aufzählbaren m -Graden mit dem Ordnungstyp der natürlichen Zahlen enthält.

Beweis: Da im Beweis von Satz 5 $A_i \equiv_{\text{btt}} A_j$ für alle i, j gilt, können wir den btt-Grad von S^* wählen. Da mit S^* auch alle $(S^*)^k$ rekursiv aufzählbar sind, sind die betreffenden m -Grade rekursiv aufzählbar.

Darüber hinaus hat Jockusch gezeigt, daß jeder nicht-rekursive tt-Grad unendlich viele m -Grade enthält. Vgl. dazu Jockusch(1966). - Zum Schluß eine Variante zu Satz 5.

Satz 6: Die Mengen $B_k := S^* \times S^* \times \dots \times S^*$ (k Faktoren, $k \geq 1$) fallen in verschiedene m -Grade.

Beweis: Für alle $k \leq l$ gilt $B_k \subseteq_m B_l$ via $f(x) = f(\langle \pi_1(x), \dots, \pi_k(x) \rangle) = \langle \pi_1(x), \dots, \pi_k(x), b, \dots, b \rangle$ mit $b \in S^*$ (wobei b am Ende des l -Tupels $(l-k)$ -mal auftritt). Also $B_1 \subseteq_m B_2 \subseteq_m B_3 \subseteq_m \dots$ - Es genügt daher zu zeigen: $B_{n+1} \not\subseteq_m B_n$ für alle n . Für $n=1$ wurde dies bereits im Beweis von Satz 1 gezeigt. Eine Verallgemeinerung liefert den Beweis für beliebiges $n > 1$.

Indirekt: Angenommen, es gilt $B_{n+1} \subseteq_m B_n$ via g (n fest); d.h. für alle x :

$x \in B_{n+1} \Leftrightarrow \langle \pi_1(x), \dots, \pi_{n+1}(x) \rangle \in (S^*)^{n+1} \Leftrightarrow g(\langle \pi_1(x), \dots, \pi_{n+1}(x) \rangle) \in (S^*)^n$.

Dann definiere

$$\begin{aligned} f(0) &:= g(\langle 0, 0, 0, 0 \rangle) \quad \text{mit } \langle 0, 0, \dots, 0 \rangle \in \mathbb{N}^{n+1}; \\ f(1) &:= g(\langle 1, 2, \dots, 2 \rangle) \quad \text{mit } \langle 1, 2, \dots, 2 \rangle \in \mathbb{N}^{n+1}; \\ f(2) &:= g(\langle 3, 4, 5, 6, 6, \dots, 6 \rangle); \\ f(3) &:= g(\langle 7, 8, \dots, 14, 14, \dots, 14 \rangle); \text{ usw.} \end{aligned}$$

Allgemein lautet die Definition von f wie folgt. Sei k minimal derart, daß $2^{k+1} > n+1$ (k eindeutig bestimmt). Insbesondere ist $2^k \leq n+1$. Definiere für $m \leq k$: $f(m) = g(\langle 2^m - 1, 2^m, \dots, 2^{m+1} - 2, 2^{m+1} - 2, \dots, 2^{m+1} - 2 \rangle)$

(wobei am Ende des Tupels $2^{m+1} - 2$ $(n+1 - 2^m)$ -mal auftritt);

$$m > k: f(m) := g(\underbrace{\langle \dots g(\langle 2^m - 1, 2^m, \dots, 2^{m+n-1} \rangle), 2^{m+n} \rangle}_{(2^m - (n+1))\text{-mal}}, \underbrace{\dots, 2^{m+1} - 2}_{n+1 \text{ Stellen}}, \underbrace{\dots, 2^{m+1} - 2}_{2^m - (n+1) \text{ Stellen}})$$

Dann ist f rekursiv, und es gilt für alle x : $f(x) \in (S^*)^n \Leftrightarrow S_x \subset S^*$. Nämlich:

$$\begin{aligned} (i) \quad f(x) &= g(\langle 2^x - 1, 2^x, \dots, 2^{x+1} - 2, 2^{x+1} - 2, \dots, 2^{x+1} - 2 \rangle) \in (S^*)^n = B_n \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \langle 2^x - 1, 2^x, \dots, 2^{x+1} - 2, 2^{x+1} - 2, \dots, 2^{x+1} - 2 \rangle \in (S^*)^{n+1} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2^x - 1, 2^x, \dots, 2^{x+1} - 2 \in S^* \Leftrightarrow S_x \subset S^*; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (ii) \quad f(x) &= g(\langle \dots g(\langle 2^x - 1, 2^x, \dots, 2^{x+n-1} \rangle), 2^{x+n} \rangle, \dots, 2^{x+1} - 2 \rangle) \in (S^*)^n \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \langle \dots g(\langle 2^x - 1, 2^x, \dots, 2^{x+n-1} \rangle), 2^{x+n} \rangle, \dots, 2^{x+1} - 2 \rangle \in (S^*)^{n+1} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow g(\langle \dots g(\langle 2^x - 1, 2^x, \dots, 2^{x+n-1} \rangle), 2^{x+n} \rangle, \dots) \in (S^*)^n \text{ \& } 2^{x+1} - 2 \in S^* \\ &\Leftrightarrow \dots ((2^x - (n+1) - 1)\text{-viele Äquivalenzen!}) \dots \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow g(\langle 2^x - 1, 2^x, \dots, 2^{x+n-1} \rangle) \in (S^*)^n \text{ \& } 2^{x+1} - 2, 2^{x+1} - 3, \dots, 2^{x+n} \in S^* \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \langle 2^x - 1, 2^x, \dots, 2^{x+n-1} \rangle \in (S^*)^{n+1} \text{ \& } 2^{x+1} - 2, 2^{x+1} - 3, \dots, 2^{x+n} \in S^* \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2^x - 1, 2^x, \dots, 2^{x+n-1} \in S^* \text{ \& } 2^{x+n}, 2^{x+n+1}, \dots, 2^{x+1} - 2 \in S^* \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2^x - 1, 2^x, \dots, 2^{x+1} - 2 \in S^* \Leftrightarrow S_x \subset S^*. \end{aligned}$$

Da $x \in K \Leftrightarrow S_x \subset S^*$, gilt somit $K \leq_m (S^*)^n$ via f . Also ist $(S^*)^n$ als rekursiv aufzählbare Menge m -vollständig, und damit (nach §2.3, Satz 9 (b), S.53) kreativ. Dies ist, wie man durch Induktion über n sieht, ein Widerspruch:

$n=1$: $(S^*)^1 = S^*$ schlicht - also nicht kreativ;

$n \rightarrow n+1$: angenommen, $(S^*)^{n+1} = S^* \times (S^*)^n$ kreativ, dann ist auch $(S^*)^n$ kreativ - im Widerspruch zur Induktionsvoraussetzung!

Daher gilt $B_{n+1} \not\leq_m B_n$ für alle n , was zu beweisen war. -

5.4 btt-Reduzierbarkeit mit Norm 1

Als ersten Satz nach unserer Definition der beschränkten tt-Reduzierbarkeit in §5.1 stellten wir fest, daß (noch vor $\leq_{tt}$) bereits $\leq_{btt}$ eine echte Verallgemeinerung von $\leq_m$ bildet. Da hierbei - für $A \leq_m B$ via f - die tt-Bedingung $g(x) = ((f(x), id)$, vermöge welcher $A \leq_{btt} B$ galt (vgl. S.111), für alle x die Norm 1 hat, ergibt sich die Vermutung, daß wir bereits dadurch, daß wir im Fall von $\leq_{btt}$ die Norm auf 1 beschränken, zu einer $\leq_m$ echt verallgemeinernden Präzisierung des Reduzierbarkeitsbegriffs gelangen - sofern dabei die gewohnten notwendigen Kriterien erfüllt sind. Daß dies tatsächlich der Fall ist, folgt unmittelbar aus unseren früheren Ergebnissen. Wir könnten nun für jedes beliebige $n \in \mathbb{N}$ eine "btt-Reduzierbarkeit mit Norm $\leq m$ " - in Zeichen etwa " $\leq_{mtt}$ " -, und damit unendlich viele verschiedene und mit zunehmendem m zunehmend allgemeinere Reduzierbarkeitsbegriffe definieren, die gleichwohl alle noch enger als $\leq_{tt}$ wären. Doch wollen wir uns auf den Fall $m=1$ beschränken.

Definition: $A \leq_{1tt} B : \Leftrightarrow A \leq_{btt} B$ mit Norm 1.

Ausführlicher gesagt, ist A auf B genau dann 1tt-reduzierbar, wenn es eine rekursive Funktion f gibt derart, daß für alle x die tt-Bedingung $f(x)$ die Gestalt $f(x) = ((x'), \alpha)$ hat, wobei α eine einstellige Boolesche Funktion ist, und: $x \in A \Leftrightarrow B$ erfüllt $f(x) \Leftrightarrow \alpha(c_B(x')) = 1$.

Wie für $\leq_{tt}$ und $\leq_{btt}$ gilt auch für $\leq_{1tt}$, daß, falls $A \leq_{1tt} B$, und B rekursiv, auch A rekursiv ist. Sei etwa $A \leq_{1tt} B$ via $f(x) = ((x'), \alpha)$. Dann läßt sich, falls B rekursiv, $c_B(x')$ und sodann $\alpha(c_B(x'))$ effektiv errechnen. Nachdem, ob dieser letztere Wert =1 oder =0 ist, gilt $x \in A$ oder $x \notin A$.

Sei nun - zum Nachweis der Reflexivität von $\leq_{1tt}$ - die Menge A beliebig gegeben. Dann gilt wie bei $\leq_{tt}$ und $\leq_{btt}$, daß $A \leq_{1tt} A$ via $f(x) = ((x), \alpha)$ mit α als der einstelligen Booleschen Identität: $x \in A \Leftrightarrow c_A(x) = 1 \Leftrightarrow id(c_A(x)) = 1 \Rightarrow f(x)$ von A erfüllt.

Auch die Transitivität von $\leq_{1tt}$ ergibt sich unmittelbar als Spezialfall der von $\leq_{tt}$. Für $A \leq_{1tt} B$ sowie $B \leq_{1tt} C$ gilt nämlich insbesondere $\leq_{tt} B$ mit Norm ≤ 1 , sowie $B \leq_{tt} C$ mit Norm ≤ 1 , und folglich $A \leq_{tt} C$ mit Norm $\leq 1 \cdot 1 = 1$. Also $A \leq_{1tt} C$. - Genauer: Sei $A \leq_{1tt} B$ via $f_1(x) = ((x'), \alpha_1)$, und $B \leq_{1tt} C$ via $f_2(x) = ((x''), \alpha_2)$ mit $\alpha_1, \alpha_2: I \rightarrow I$. Dann gilt für alle x : $x \in A \Leftrightarrow f_1(x)$ von B erfüllt $\Leftrightarrow \alpha_1(c_B(x')) = 1$, sowie $x \in B \Leftrightarrow f_2(x)$ von C erfüllt $\Leftrightarrow \alpha_2(c_C(x'')) = 1$. Sei nun x beliebig gegeben. Sei $f_1(x) = ((x'), \alpha_1)$. Dann berechne $f_2(x')$; sei etwa $f_2(x') = ((x''), \alpha_2)$. Dann gilt für die tt-Bedingung $f_3(x) = ((x''), \alpha_3)$ mit $\alpha_3(u) = \alpha_2(\alpha_1(u))$ für alle x : $x \in A \Leftrightarrow \alpha_1(c_B(x')) = 1 \Leftrightarrow \alpha_1(\alpha_2(c_C(x''))) = 1 \Leftrightarrow \alpha_3(c_C(x'')) = 1 \Leftrightarrow f_3(x)$ von C erfüllt (denn: $x' \in B \Leftrightarrow C$ erfüllt $f_2(x') \Leftrightarrow \alpha_2(c_C(x'')) = 1$; also: $c_B(x') = 1 \Leftrightarrow x' \in B \Leftrightarrow \alpha_2(c_C(x'')) = 1$ und: $c_B(x') = 0 \Leftrightarrow x' \notin B \Leftrightarrow \alpha_2(c_C(x'')) = 0$; also $c_B(x') = \alpha_2(c_C(x''))$). Es heißt $A \leq_{1tt} C$ via f_3 .

Definition: $A \equiv_{1tt} B :\Leftrightarrow A \leq_{1tt} B \ \& \ B \leq_{1tt} A$.

Bezeichnung: A 1tt-äquivalent mit B.

Die Äquivalenzklassen von $\leq_{1tt}$, d.h. die Klassen der Gestalt $d_{1tt}(A) := \{B \mid A \equiv_{1tt} B\}$, heißen 1tt-Grade.

Definition: A heißt vollständig in bezug auf $\leq_{1tt}$ (bzw. 1tt-vollständig), wenn (i) A rekursiv aufzählbar;

(ii) $\forall B [B \text{ rekursiv aufzählbar} \Rightarrow B \leq_{1tt} A]$.

Wie wir als Beispiele für btt-Reduktionen alle tt-Reduktionen, bei welchen wir mit einer beschränkten Norm ausgekommen waren, anführen konnten, so ziehen wir nun als Beispiele für 1tt-Reduktionen all jene btt-Reduktionen heran, bei denen die Norm der Reduktionsfunktionen insbesondere durch 1 beschränkt war. So gilt $K \equiv_{1tt} \bar{K}$ (- eine Feststellung, die wir anschließend in Satz 2 verallgemeinern können) ebenso wie etwa $K \equiv_{1tt} K \text{ Jung } \bar{K}$.

Satz 1: $A \leq_m B \Rightarrow A \leq_{1tt} B$ (für alle A, B).

Beweis: $A \leq_m B$ via $f \Rightarrow A \leq_{1tt} B$ via g mit $g(x) = ((f(x), \alpha))$, wobei $\alpha = \text{id}_I$.

Zusammen mit der Aussage, daß $K \equiv_{1tt} \bar{K}$ (während K und $\bar{K}$ bzgl. $\leq_m$ unvergleichbar waren), folgt aus Satz 1, daß, wie bereits angekündigt, $\leq_{1tt}$ eine echte Verallgemeinerung von $\leq_m$ darstellt. So erscheint bereits $\leq_{1tt}$ als Präzisierung des intuitiven Reduzierbarkeitsbegriffs insofern wesentlich adäquater als $\leq_m$, als je eine Menge und ihr Komplement in demselben 1tt-Grad liegen.

Satz 2: $A \leq_{1tt} \bar{A}$ (und folglich $A \equiv_{1tt} \bar{A}$) für alle A.

Beweis: Die tt-Bedingung $f(x) = ((x), \alpha)$ mit $\alpha(0) = 1$ und $\alpha(1) = 0$, vermöge welcher $A \leq_{btt} \bar{A}$, hat für alle x die Norm 1; also $A \leq_{1tt} \bar{A}$ via f. Also folgt mit $\bar{A} \leq_{1tt} \bar{\bar{A}}$, daß $A \equiv_{1tt} \bar{A}$.

Weiter gilt wie für $\leq_{btt}$ bereits für $\leq_{1tt}$, daß - im Unterschied zu $\leq_m$ - eine rekursive Menge auf jede beliebige reduzierbar ist - im Einklang mit der Intuition, daß, wenn eine Menge schon entscheidbar ist, zu ihrer Entscheidung das Entscheidungsproblem einer anderen keine Rolle mehr spielen sollte (vgl. dazu die Einleitung, S.5).

Satz 3: A rekursiv $\Rightarrow \forall B [A \leq_{1tt} B]$.

Beweis: Da im entsprechenden Beweis für $\leq_{tt}$ die tt-Bedingung $f(x)$ für alle x die Norm 1 hatte (vgl. S.98), gilt $A \leq_{1tt} B$ via f.

Wie für $\leq_{tt}$ und $\leq_{btt}$, gilt demnach bereits für $\leq_{1tt}$, daß die dazugehörige Reduzierbarkeitsordnung im Grad der rekursiven Mengen - i.e. dem rekursiven Grad - ein kleinstes Element besitzt. Denn nach Satz 3 sind alle rekursiven Mengen 1tt-äquivalent, wobei sie - nach demselben Satz - unter

len anderen Mengen liegen.- Die $1tt$ -Reduzierbarkeitsordnung hat mit der von tt bzw. $\leq_{btt}$ die Struktur eines Halbverbands gemeinsam, weshalb sich auch Satz 6 von §4.2, bzw. Satz 4 von §5.1 analogisieren lassen.

Satz 4: Die $1tt$ -Reduzierbarkeitsordnung ist ein oberer Halbverband.

Beweis: Wegen $A \leq_m AjungB$ und $B \leq_m AjungB$ (§2.1, Satz 8) gilt nach Satz 1 $A \leq_{1tt} AjungB$ und $B \leq_{1tt} AjungB$, also ist $d_{1tt}(AjungB)$ eine obere Schranke von $d_{1tt}(A)$ und $d_{1tt}(B)$ in der $1tt$ -Reduzierbarkeitsordnung. Ist weiterhin $A \leq_{1tt} C$ via f , sowie $B \leq_{1tt} C$ via g (d.h. daß $f(x)$ und $g(x)$ für alle x die Norm 1 haben), so hat (vgl. den Beweis von Satz 6, §4.2) auch $h(x)$ die Norm 1 (für alle x). Mithin $AjungB \leq_{1tt} C$ via h . Also ist $d_{1tt}(AjungB)$ die kleinste obere Schranke von $d_{1tt}(A)$ und $d_{1tt}(B)$.

Dagegen können wir nicht erwarten, daß - wie bei $\leq_{tt}$ bzw. $\leq_{btt}$ - für eine beliebige Menge B die Klasse aller auf B $1tt$ -reduzierbaren Mengen, i.e. $d_{1tt}(B) = \{A \mid A \leq_{1tt} B\}$, eine Boolesche Algebra bildet, da für $A_1 \leq_{btt} B$ via f_1 und $A_2 \leq_{btt} B$ via f_2 die Funktionen f und g , vermöge welcher $A_1 \cup A_2 \leq_{btt} B$ bzw. $A_1 \cap A_2 \leq_{btt} B$ galt (vgl. dazu den Beweis von Satz 5, §5.1, S.112), die Norm 2 haben.- Analog Satz 6, §5.1, gilt jedoch, daß auch jeder $1tt$ -Grad genau abzählbar unendlich viele Elemente enthält.

Satz 5: Jeder $1tt$ -Grad erhält genau abzählbar unendlich viele Mengen.

Beweis: Analog dem Beweis von Satz 8, §4.2, bzw. dem von Satz 6, §5.1, wo $f(x)$ und $g(x)$ für alle x die Norm 1 hatten!

Nach §5.2, Korollar zu Satz 1, gibt es eine tt -vollständige Menge, die nicht btt -vollständig ist, - und andererseits (nach Young(1963), vgl. dazu unsere Bemerkung S.118f.) eine btt -vollständige Menge, die nicht m -vollständig ist. Existiert analog eine $1tt$ -vollständige Menge, die nicht m -vollständig ist, bzw. eine btt -vollständige, nicht $1tt$ -vollständige Menge? Wir beantworten die erste Frage negativ, die zweite positiv. Dazu beweisen wir im nächsten Satz die Kreativität der $1tt$ -vollständigen Mengen. Zusammen mit dem Resultat, daß die kreativen Mengen m -vollständig sind (vgl. S.54f.), folgt daraus, daß die $1tt$ -vollständigen Mengen auch m -vollständig sind. Da umgekehrt jede m -vollständige Menge trivialerweise $1tt$ -vollständig ist, fällt der $1tt$ -Grad der $1tt$ -vollständigen Mengen mit dem m -Grad der m -vollständigen - und daher, nach §3.2, mit dem 1 -Grad der 1 -vollständigen - zusammen. Folglich muß es - nach Young - eine btt -vollständige Menge geben, die nicht $1tt$ -vollständig ist.

Satz 6: A $1tt$ -vollständig $\implies A$ kreativ.

Beweis: Sei A $1tt$ -vollständig. Gelte insbesondere $K \leq_{1tt} A$ via f mit $f(x) = ((y), \infty)$. Da $A \neq \emptyset$, $A \neq \mathbb{N}$ (sonst A damit K rekursiv), gibt es $x_0 \in A, x_1 \in \bar{A}$.

Definiere für alle x

$$g(x) = \begin{cases} \langle y, x_1 \rangle, & \text{falls } f(x) = ((y), \alpha) \text{ mit } \alpha = \text{id}; \\ \langle x_0, y \rangle, & \text{falls } f(x) = ((y), \alpha) \text{ mit } \alpha(0)=1 \text{ und } \alpha(1)=0; & (\alpha = \text{neg}) \\ \langle x_1, x_0 \rangle, & \text{falls } f(x) = ((y), \alpha) \text{ mit } \alpha(0) = \alpha(1)=0; & (\alpha = 0) \\ \langle x_0, x_1 \rangle, & \text{falls } f(x) = ((y), \alpha) \text{ mit } \alpha(0) = \alpha(1)=1. & (\alpha = 1) \end{cases}$$

Dann ist g rekursiv, und für alle x gilt: $x \in K \implies f(x)$ von A erfüllt $\implies \alpha(c_A(y))=1 \implies (\alpha = \text{id} \ \& \ c_A(y)=1)$ oder $(\alpha = \text{neg} \ \& \ c_A(y)=0)$ oder $(\alpha = 1 \ \& \ c_A(y) \text{ beliebig}) \implies (g(x) = \langle y, x_1 \rangle \ \& \ y \in A)$ oder $(g(x) = \langle x_0, y \rangle \ \& \ y \notin A)$ oder $(g(x) = \langle x_0, x_1 \rangle)$
 $\implies g(x) \in A \times \bar{A}$; sowie: $x \notin K \implies f(x)$ nicht von A erfüllt $\implies \alpha(c_A(y))=0 \implies (\alpha = \text{id} \ \& \ c_A(y)=0)$ oder $(\alpha = \text{neg} \ \& \ c_A(y)=1)$ oder $(\alpha = 0 \ \& \ c_A(y) \text{ beliebig}) \implies (g(x) = \langle y, x_1 \rangle \ \& \ y \notin A)$ oder $(g(x) = \langle x_0, y \rangle \ \& \ y \in A)$ oder $(g(x) = \langle x_1, x_0 \rangle \ \& \ y \text{ bel.})$
 $\implies g(x) \notin A \times \bar{A}$. Also: $x \in K \iff g(x) \in A \times \bar{A}$; d.h. $K \leq_m A \times \bar{A}$ via g . Da K kreativ, und A als ltt-vollständige Menge insbesondere rekursiv aufzählbar, folgt nun - vermöge des Satzes: " A kreativ & B rekursiv aufzählbar & $A \leq_m B \times \bar{B} \implies B$ kreativ" (vgl. Rogers(1967), Übung 7-26, S.100) - die Kreativität von A .
 Q.e.d.

0.1 Definition und Eigenschaften

In §5.2 (vgl. S.113f.) haben wir beschrieben, wie eine tt-Bedingung auch durch eine aussagenlogische Formel darstellen läßt. Eine solche Formel ist i.a. eine Disjunktion von Konjunktionen atomarer Formeln der Gestalt " $x \in X$ " (bzw. " $x \notin X$ "), und im Hinblick auf eine beliebige Menge X genau dann wahr, wenn die tt-Bedingung von X erfüllt wird. Wir wollen nun insbesondere tt-Bedingungen betrachten, deren zugeordnete Formeln atomare Formeln der Gestalt " $x \in X$ " als Disjunktionsglieder besitzen, also von der Form " $x_1 \in X \vee x_2 \in X \vee \dots \vee x_k \in X$ " (mit $k \in \mathbb{N}$) sind. Wir nennen diese tt-Bedingungen **disjunktiv** und konzentrieren uns auf Fälle, in denen tt-Reduzierbarkeit ausschließlich disjunktiven tt-Bedingungen auftritt.

So ist beispielsweise $\overline{A} \times \overline{A}$ vermöge ausschließlich disjunktiver tt-Bedingungen auf A tt-reduzierbar. Definiere nämlich $f(x) = ((\pi_1(x), \pi_2(x), \alpha)$ mit $f(0,0) = 0$, sowie $\alpha(0,1) = \alpha(1,0) = \alpha(1,1) = 1$. Dann ist für alle $x: x \in \overline{A} \times \overline{A} \iff x \notin \overline{A} \times \overline{A} \iff \pi_1(x) \notin \overline{A}$ oder $\pi_2(x) \notin \overline{A} \iff \pi_1(x) \in A$ oder $\pi_2(x) \in A \iff c_A(\pi_1(x)) = 1$ oder $c_A(\pi_2(x)) = 1 \iff \alpha(c_A(\pi_1(x)), c_A(\pi_2(x))) = 1 \iff f(x)$ von A erfüllt; d.h. $\overline{A} \times \overline{A} \leq_{tt} A$ vermöge f . Die $f(x)$ entsprechende Formel lautet " $\pi_1(x) \in A \vee \pi_2(x) \in A$ ".

Ist A tt-reduzierbar auf B , und treten dabei nur disjunktive tt-Bedingungen auf, so nennen wir A "**q-reduzierbar**" auf B . Unter Berücksichtigung dessen, daß wir die dabei jeder tt-Bedingung $f(x)$ zugeordnete endliche Menge $\{x_1, \dots, x_k\}$ durch ihren - effektiv berechenbaren - kanonischen Index charakterisieren können, gelangen wir zu der folgenden Definition.

Definition: A heißt **q-reduzierbar** auf B (in Zeichen: $A \leq_q B$), wenn es eine rekursive Funktion f gibt derart, daß für alle x gilt: $x \in A \iff D_{f(x)} \cap B \neq \emptyset$.

Wir zeigen zuerst, daß, wie bereits aus obiger Motivation hervorgeht, die Relation $\leq_q$ eine gültige Präzisierung des Reduzierbarkeitsbegriffs darstellt. Sei dazu $A \leq_q B$ via f , und B rekursiv. Dann können wir für jedes x den Wert $f(x)$ effektiv berechnen und daraus die Menge $D_{f(x)}$ (mit $f(x)$ als kanonischem Index) ermitteln. Da $D_{f(x)}$ endlich, etwa $D_{f(x)} = \{x_1, \dots, x_k\}$, können wir nacheinander für jedes ihrer Elemente x_i ($1 \leq i \leq k$) prüfen, ob $x_i \in B$ oder nicht. Stoßen wir dabei auf ein x_i mit $c_B(x_i) = 1$, so sind wir fertig; denn dann gilt $x_i \in D_{f(x)} \cap B$, also $D_{f(x)} \cap B \neq \emptyset$, und somit nach Voraussetzung $x \in A$. Finden wir dagegen für alle i , daß $c_B(x_i) = 0$, dann gilt $D_{f(x)} \cap B = \emptyset$, und folglich $x \notin A$. Da dieses (effektive) Vorgehen nur endlich viele Schritte erfordert, ist A entscheidbar.

Auch die Reflexivität und Transitivität sind, wie wir als nächstes zeigen, von $\leq_q$ erfüllt. Definiere nämlich f als rekursive Funktion durch $f(x) = 2^x$ für alle x . Dann ist $D_{f(x)} = \{x\}$ für alle x , und für eine beliebige Men-

ge A gilt: $x \in A \iff \{x\} \subset A \iff D_{f(x)} \cap A \neq \emptyset$; d.h. $A \leq_q A$ via f . Also ist $\leq_q$ reflexiv.- Etwas umständlicher ist der Nachweis der Transitivität. Gelte dazu $A \leq_q B$ via f , sowie $B \leq_q C$ via g . Wir konstruieren eine rekursive Funktion h , vermöge welcher $A \leq_q C$ gilt. Definiere zuerst $\tilde{h}$ als Abbildung von $\mathbb{N}$ in die Klasse $\text{Pot}(\mathbb{N})$ der endlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$ durch $\tilde{h}(x) = \bigcup_{y \in D_{f(x)}} D_{g(y)}$. Da $D_{f(x)}$ endlich, und für alle $y \in D_{f(x)}$ $D_{g(y)}$ endlich, ist $\tilde{h}(x)$ - als endliche Vereinigung endlicher Mengen - endlich und aufgrund der Berechenbarkeit von f und g effektiv konstruierbar. Definiere nun für alle x den Wert $h(x)$ als den kanonischen Index von $\tilde{h}(x)$. Dann ist, da $\tilde{h}$ - im intuitiven Sinn - berechenbar, h nach der Churchschen These rekursiv, und es folgt für alle x :

$$\begin{aligned} x \in A &\iff D_{f(x)} \cap B \neq \emptyset \iff \exists z [z \in D_{f(x)} \ \& \ z \in B] \iff \exists z [z \in D_{f(x)} \ \& \ D_{g(z)} \cap C \neq \emptyset] \\ &\iff \exists z \exists w [z \in D_{f(x)} \ \& \ w \in D_{g(z)} \ \& \ w \in C] \iff \exists w [w \in D_{h(x)} \ \& \ w \in C] \iff D_{h(x)} \cap C \neq \emptyset \end{aligned}$$

d.h. $A \leq_q C$ via h .

Also $\leq_q$ transitiv.

Nachdem somit $\leq_q$ als gültige Präzisierung des Reduzierbarkeitsbegriffes erwiesen ist, können wir die entsprechenden Reduzierbarkeitsgrade definieren.

Definition: $A \equiv_q B \iff A \leq_q B \ \& \ B \leq_q A$.

Bezeichnung: A q-äquivalent mit B .

Die Äquivalenzklassen von $\leq_q$, d.h. die Klassen der Gestalt $d_q(A) := \{B \mid A \equiv_q B\}$, heißen q-Grade.

Definition: A heißt vollständig in bezug auf $\leq_q$ (bzw. q-vollständig), wenn

(i) A rekursiv aufzählbar;

(ii) $\forall B [B \text{ rekursiv aufzählbar} \implies B \leq_q A]$.

Wir diskutieren nun $\leq_q$ entsprechend $\leq_{\text{btt}}$, wobei sich charakteristische Parallelen ergeben werden.

Satz 1: $A \leq_m B \implies A \leq_q B$ (für alle A, B).

Beweis: Gelte $A \leq_m B$ via f . Definiere für alle x $g(x) := 2^{f(x)}$. Dann ist g rekursiv, und es gilt für alle x : $x \in A \iff f(x) \in B \iff \{f(x)\} = D_{g(x)} \subset B \iff D_{g(x)} \cap B \neq \emptyset$; d.h. $A \leq_q B$ via g .

Satz 2: $A \leq_q B \implies A \leq_{\text{tt}} B$ (für alle A, B).

Beweis: Gelte $A \leq_q B$ via f . Definiere für alle x die tt-Bedingung $g(x)$ durch $g(x) := ((x_1, \dots, x_k) \rho)$, wobei $D_{f(x)} = \{x_1, \dots, x_k\}$ (mit $x_1 < \dots < x_k$) sei, und $\alpha(u_1, \dots, u_k) = 1 \iff u_1 = 1 \vee \dots \vee u_k = 1$. Dann ist g offensichtlich rekursiv, und es gilt für alle x : $x \in A \iff D_{f(x)} \cap B \neq \emptyset \iff \{x_1, \dots, x_k\} \cap B \neq \emptyset \iff \exists i \leq k [c_B(x_i) = 1] \iff \alpha(c_B(x_1), \dots, c_B(x_k)) = 1 \iff B$ erfüllt $((x_1, \dots, x_k) \rho) = g(x)$. Also $A \leq_{\text{tt}} B$ via g . Q.e.d.

Nach Satz 1 haben wir in Gestalt der q -Reduzierbarkeit - ähnlich wie Fall von $\leq_{\text{btt}}$ - zwischen m -Reduzierbarkeit und tt -Reduzierbarkeit eine weitere Präzisierung geschoben. Besteht hierin die wesentliche Gemeinsamkeit von $\leq_q$ und $\leq_{\text{btt}}$, ergeben sich doch auch beträchtliche Unterschiede zwischen beiden Präzisierungen. So kann etwa für $\leq_q$ keine Analogie zu Satz 2, §5.1, formuliert werden: nicht alle Mengen A liegen in demselben q -Grad wie ihr Komplement. Betrachte nämlich $A = \mathbb{N}$. Dann ist A nicht auf $\bar{A}$ reduzierbar; denn es gibt keine rekursive Funktion f derart, daß für alle x gilt: $x \in \mathbb{N} \iff D_{f(x)} \cap \bar{\emptyset} \neq \emptyset$. Entsprechend ist Satz 3, §5.1, zu modifizieren: Im Unterschied zu $\leq_{\text{btt}}$ bzw. $\leq_{\text{tt}}$ liegen, wie das Beispiel $\mathbb{N} \not\leq_q \emptyset$ zeigt, nicht alle rekursiven Mengen in einem einzigen q -Grad. Vielmehr gilt das Folgende.

Satz 3: Die rekursiven Mengen zerfallen in zwei q -Grade, nämlich $\underline{0} := \{\emptyset\}$ und $\underline{1} := \{A \mid \emptyset \neq A \text{ \& } A \text{ rekursiv}\}$, wobei $\underline{0} <_q \underline{1}$ gilt.

weis: Seien A, B nichtleere rekursive Mengen. Dann gilt:

i) Für $x_0 \in B$ ist f , definiert durch $f(x) := 2^{x_0}$, falls $x \in A$, und $= 0$ sonst, eine rekursive Funktion, für die gilt: $x \in A \iff f(x) = 2^{x_0} \iff D_{f(x)} = \{x_0\} \iff D_{f(x)} \cap B \neq \emptyset$. Also $A \leq_q B$ via f . Da aus Symmetriegründen auch $B \leq_q A$, folgt $A \equiv_q B$. Somit liegen alle nichtleeren rekursiven Mengen in einem q -Grad.

ii) Für $f(x) := 0$ gilt $D_{f(x)} = \emptyset$ für alle x , und somit $D_{f(x)} \cap A = \emptyset$ für alle A , d.h. $\emptyset \leq_q A$ via f . Also ist $\underline{0}$ mit $\underline{1}$ vergleichbar, wobei $\underline{0} <_q \underline{1}$.

iii) Angenommen, $A \leq_q \emptyset$ via f . Dann gilt für $x_0 \in A$: $D_{f(x_0)} \cap \emptyset \neq \emptyset$ - Widerspruch. Folglich $\underline{0} <_q \underline{1}$.

§6.2 q-Zylinder

Wie im Fall von $\leq_{tt}$ können wir auch für $\leq_q$ den Begriff des Zylinders präzisieren und die entsprechenden Resultate herleiten.

Definition: Für alle Mengen A sei

$$A^q := \{x \mid D_x \cap A \neq \emptyset\} \times \mathbb{N}.$$

Eine Menge C heißt q-Zylinder, wenn $C \equiv A^q$ für ein $A \subset \mathbb{N}$.

A^q heißt die q-Zylindrifizierung von A.

Satz 1: (a) $A \leq_1 A^q$ für alle A.

(b) $A^q \leq_q A$ (und damit $A \equiv_q A^q$) für alle A.

Beweis: (a) Definiere $f(x) := \langle 2^x, 0 \rangle$ für alle x. Dann ist f rekursiv und injektiv, und es gilt: $x \in A \iff \{x\} \subset A \iff D_{2^x} \subset A \iff D_{2^x} \cap A \neq \emptyset \iff f(x) \in \{x \mid D_x \cap A \neq \emptyset\} \times \mathbb{N} = A^q$; d.h. $A \leq_1 A^q$ via f.

(b) Definiere für alle x $f(x) := \pi_1(x)$. Dann gilt: $x \in A^q \iff \pi_1(x) = f(x) \in \{x \mid D_x \cap A \neq \emptyset\} \iff D_{f(x)} \cap A \neq \emptyset$; d.h. $A^q \leq_q A$ via f. Daraus folgt mit (a), daß $A \equiv_q A^q$.

Schneller als das Lemma aus §4.3, das jeden tt-Zylinder als Zylinder erwies (vgl. S.104), läßt sich ein analoges für die q-Zylinder zeigen.

Lemma: A q-Zylinder $\implies$ A Zylinder.

Beweis: Sei A ein q-Zylinder, $A \equiv C^q$ für ein geeignetes C. Das heißt $A \equiv B \times \mathbb{N}$ mit $B = \{x \mid D_x \cap C \neq \emptyset\}$, und somit ist A per definitionem ein Zylinder.

Satz 3 aus §3.3 charakterisierte die Zylinder als genau die Mengen, auf die eine Menge 1-reduzierbar ist, sobald sie nur m-reduzierbar auf sie ist; und Satz 3 aus §4.3 entsprechend die tt-Zylinder als genau die Mengen, auf die eine Menge genau dann 1-reduzierbar ist, wenn sie tt-reduzierbar auf sie ist. Analog erweisen sich nach dem folgenden Satz die q-Zylinder als die Mengen, auf die eine Menge genau dann 1-reduzierbar ist, wenn sie q-reduzierbar auf sie ist.

Satz 2: A q-Zylinder $\iff \forall B [B \leq_q A \implies B \leq_1 A]$.

Beweis: " $\implies$ ": Sei A ein q-Zylinder, $A \equiv C^q$. Angenommen, $B \leq_q A$, also $B \leq_q C^q$; dann folgt nach Satz 1 (b), daß $B \leq_q C$. Gelte $B \leq_q C$ via f, und folglich für alle x: $x \in B \iff D_{f(x)} \cap C \neq \emptyset \iff \langle f(x), x \rangle \in C^q$. Da für $g(x) := \langle f(x), x \rangle$ g rekursiv und injektiv ist, gilt $B \leq_1 C^q$ via g. Da $C^q \equiv A$, folgt $B \leq_1 A$.

" $\impliedby$ ": Gelte $\forall B [B \leq_q A \implies B \leq_1 A]$. Nach Satz 1 (b) folgt insbesondere $A^q \leq_1 A$, und daraus mit Satz 1 (a) $A \equiv_1 A^q$. Nach Myhill gilt dann $A \equiv A^q$, also ist A per definitionem ein q-Zylinder.

Aus Satz 1 und Satz 2 folgt - wie in den früheren Fällen -, daß jeder q-Grad einen maximalen 1-Grad enthält, welcher durch q-Zylindrifizierung

ines beliebigen Elements des q -Grades entsteht: Für B aus $d_q(A)$ ist $d_1(B^q)$ der maximale 1-Grad in $d_q(A)$. Denn nach Satz 1 gilt $B \equiv_q B^q$, weswegen auch B in $d_q(A)$ liegt; und für weiteres C aus $d_q(A)$ folgt aus $C \leq_q B \leq_q B^q$, daß $C \leq_q B^q$, und damit nach Satz 2 $C \leq_1 B^q$. - Gleich der m - und tt -Reduzierbarkeitsordnung spiegelt sich auch die q -Reduzierbarkeitsordnung insofern auf eine natürliche Weise in der 1-Ordnung, als eine Menge auf eine zweite genau dann q -reduzierbar ist, wenn für ihre q -Zylindrifizierungen das Entsprechende in bezug auf $\leq_1$ gilt.

Satz 3: $A \leq_q B \iff A^q \leq_1 B^q$.

Beweis: " $\implies$ ": Gelte $A \leq_q B$. Da nach Satz 1 (b) $A^q \leq_q A$, folgt daraus $A^q \leq_q B$; und da nach Satz 1 (a) $B \leq_1 B^q$, schließlich $A^q \leq_q B^q$. Dann gilt, da B^q ein q -Zylinder ist, nach Satz 2 $A^q \leq_1 B^q$.
" $\impliedby$ ": Gelte $A^q \leq_1 B^q$, und folglich $A^q \leq_q B^q$. Dann folgt aus $A \leq_1 A^q \leq_q B^q \leq_q B$ (Satz 1), daß $A \leq_q B$.

Für den kanonischen Homomorphismus $\mathcal{A}$, der jeden q -Grad $d_q(A)$ einer Menge A auf den 1-Grad $d_1(A^q)$ ihrer q -Zylindrifizierung projiziert, gilt demnach: $A \equiv_q B \iff A^q \equiv_1 B^q$; i.e. $d_q(A) = d_q(B) \iff d_1(\mathcal{A}(A)) = d_1(\mathcal{A}(B))$.

Propollar: Für alle A sind äquivalent: (i) A q -Zylinder;

$$(ii) A^q \leq_1 A;$$

$$(iii) A \equiv A^q.$$

Beweis: "(i) $\implies$ (ii)": Sei A ein q -Zylinder. Dann folgt aus $A^q \leq_q A$ mit Satz 2 die Behauptung.

"(ii) $\implies$ (iii)": Gelte $A^q \leq_1 A$. Dann gilt, da $A \leq_1 A^q$, daß $A \equiv_1 A^q$, und folglich nach Myhill $A \equiv A^q$.

"(iii) $\implies$ (i)": Wenn $A \equiv A^q$, ist A nach Definition ein q -Zylinder.

Bemerkung: Würde man anstelle von A^q (vgl. Definition S.130) $\tilde{A}^q := \{x \mid D_x \cap A \neq \emptyset\}$ definieren, so würde Satz 2 (mit $\tilde{A}^q$ statt A^q) i.a. nicht gelten. Betrachte dazu folgendes Gegenbeispiel.

Nähle A derart, daß $\tilde{A}$ frei. Dann ist auch $\tilde{A}^q = \{x \mid D_x \subset \tilde{A}\}$ frei. Wenn da $\tilde{A}$ unendlich ist, folgt aus " $x \in \tilde{A} \implies 2^x \in \tilde{A}^q$ ", daß $\tilde{A}^q$ unendlich ist. Angenommen, $\tilde{A}^q$ besitzt eine unendliche rekursiv aufzählbare Teilmenge; dann läßt es ein rekursives und injektives f mit $\text{range } f \subset \tilde{A}^q$ und o.B.d.A. $f(x) \neq 0$ für alle x . Um zu sehen, daß dann - im Widerspruch zu $\tilde{A}$ frei - auch $\tilde{A}$ eine unendliche rekursiv aufzählbare Teilmenge besitzt, definiere eine Funktion g induktiv durch

$$g(0) = \mu x [x \in D_{f(0)}], \text{ und}$$

$$g(n+1) = \begin{cases} \mu x [x \in D_{f(n+1)} \setminus \bigcup_{i \leq n} D_{f(i)}], & \text{falls dies existiert;} \\ \mu x [x \in D_{f(0)}], & \text{sonst.} \end{cases}$$

Da $f(x) \neq 0$ für alle x - also $D_{f(x)} \neq \emptyset$ für alle x - ist $g(0)$ als kleinstes

Element einer effektiv angebbaren endlichen Menge wohldefiniert, und folglich auch $g(n+1)$ für den Fall, daß das kleinste Element von $D_{f(n+1)} \setminus \bigcup_{i \leq n} D_{f(i)}$ nicht existiert. Existiert dieses hingegen, dann ist es durch endlich viele Vergleiche zu ermitteln. Daher ist g rekursiv.- Da außerdem $\text{range } f$ unendlich ist, und somit die endlichen $D_{f(i)}$ immer größer werden, gibt es zu jedem $m \in \mathbb{N}$ ein $n \geq m$ derart, daß die Menge $D_{f(n+1)} \setminus \bigcup_{i \leq n} D_{f(i)} \neq \emptyset$ ist, insbesondere also deren kleinstes Element neu zu $\text{range } g$ hinzukommt. Also ist $\text{range } g$ eine unendliche rekursiv aufzählbare Menge.- Da schließlich - wegen $\text{range } f \subset \bar{A}^q$, also $g(i) \in D_{f(i)} \subset D_{f(0)} \subset \bar{A}$ für alle i , ist $\text{range } g \subset \bar{A}$.- Also $\bar{A}^q$ frei.

Sei nun $B := \emptyset$. Dann gilt $B \leq_q A$ via $f(x) := 0$ für alle x . Damit folgte nach Satz 1 $B^q \leq_q B \leq_q A \leq_1 A^q$, also $B^q \leq_q A^q$; nach Satz 2 $B^q \leq_1 A^q$, und daher auch $\bar{B}^q \leq_1 \bar{A}^q$, i.e. $N \leq_1 \bar{A}^q$. Für $N \leq_1 \bar{A}^q$ via h wäre dann $\text{range } h$ eine unendliche rekursiv aufzählbare Teilmenge von $\bar{A}^q$ - im Widerspruch zu $\bar{A}^q$ frei!

Satz 4: $A \leq_q B$ & B rekursiv aufzählbar $\implies A$ rekursiv aufzählbar.

Beweis: Sei $A \leq_q B$, und B rekursiv aufzählbar. Dann gilt $A \leq_q B^q$, und damit nach Satz 2 $A \leq_1 B^q$. Nach §3.1, Satz 2 (S.57), genügt es daher zu zeigen, daß $B^q (= \{x \mid D_x \cap B \neq \emptyset\} \times \mathbb{N})$ rekursiv aufzählbar ist. Sei dazu f eine Aufzählung von B . Dann gilt $B^q = \{x \mid D_x \cap \text{range } f \neq \emptyset\} \times \mathbb{N}$, und wir erhalten mittels des folgenden Verfahrens eine Liste für B^q :

1. Schritt: Bilde die endliche Menge $D_{\Pi_1(0)}$ und vergleiche alle ihre Elemente mit der ersten Zahl auf der Liste von $\text{range } f$.
2. Schritt: Bilde $D_{\Pi_1(1)}$ und vergleiche ihre Elemente mit den ersten beiden Elementen der Liste von $\text{range } f$.

⋮

n -ter Schritt: Bilde die endliche Menge $D_{\Pi_1(n-1)}$ und vergleiche alle ihre Elemente mit den ersten n Elementen auf der Liste von $\text{range } f$.

⋮

Erscheint im n -ten Schritt irgendeines der Elemente von $D_{\Pi_1(n-1)}$ unter den ersten n Zahlen auf der Liste von $\text{range } f$, nehme in die Liste von B^q auf alle $\langle \Pi_1(n-1), x \rangle$, $x \in \mathbb{N}$,

5.3 $\leq_q$ und $\leq_{tt}$ (bzw. $\leq_{btt}$); q-kreative Mengen

Satz 1: $\leq_q$ wird weder durch $\leq_{tt}$, noch durch $\leq_{btt}$ impliziert.

Beweis: Es gilt $\bar{K} \leq_{btt} K$ und $\bar{K} \leq_{tt} K$, aber nach §6.2, Satz 4, $\bar{K} \not\leq_q K$.

Satz 2: $\leq_q$ impliziert nicht $\leq_{btt}$.

Beweis: Wir zeigen, daß $\bar{K} \leq_q \bar{S}^*$ mit S^* aus dem Beweis von Satz 1, §4.3 (S^* schlicht und tt -vollständig). Da nach §5.2, Korollar zu Satz 1 (vgl. S. 116) $K \not\leq_{btt} S^*$, also - nach §5.1, Satz 2 - auch $\bar{K} \not\leq_{btt} \bar{S}^*$, folgt daraus die Behauptung.

Nach dem Beweis von Satz 1, §4.3 (vgl. S. 102f.) gilt für alle x : $x \in \bar{K} \iff x \in S_x \not\leq S^* \iff S_x \cap \bar{S}^* \neq \emptyset$, wobei $S_x = \{2^x - 1, \dots, 2^{x+1} - 2\}$. Da sich für jedes x aus der endlichen Menge S_x (mit der Mächtigkeit 2^x) effektiv ihr kanonischer Index errechnen läßt, gibt es eine rekursive Funktion f derart, daß $D_{f(x)} = S_x$. (Explizit: $f(x) := 2^{2^x} - 1 + \dots + 2^{2^{x+1} - 2}$ für alle x .) Damit folgt: $x \in \bar{K} \iff D_{f(x)} \cap \bar{S}^* \neq \emptyset$; d.h. $\bar{K} \leq_q \bar{S}^*$ via f .

Im folgenden zeigen wir, daß die q-vollständigen Mengen nicht mit den tt -vollständigen zusammenfallen, und folglich $\leq_q$ und $\leq_{tt}$ sich auf den nicht-rekursiven, rekursiv aufzählbaren Mengen unterscheiden. Dazu bedienen wir uns wesentlich des Begriffs der q-kreativen Menge. Shoenfield(1957) definiert eine Menge A als quasierzeugend ("quasiproductive", vgl. engl. Original), wenn "there is a partial recursive function f such that $f \omega_n \subset A$, then $f(n)$ is defined, $\alpha_{f(n)} \subset A$, and $\alpha_{f(n)} \not\subset \omega_n$ ". We then call f a quasiproductive function of A " ("es eine partiell rekursive Funktion f gibt derart, daß, falls $\omega_x \subset A$, $f(x)$ definiert ist, und $f(x) \subset A$ sowie $D_{f(x)} \not\subset \omega_x$ gilt. Wir nennen dann f eine quasierzeugende Funktion von A " - in unserer Notation (vgl. a.a.O., S. 964)). Analog dem Verhältnis der kreativen zu den erzeugenden Mengen (vgl. §2.3) heißt dann eine Menge A "quasikreativ" ("quasicreative", im Original), wenn sie rekursiv aufzählbar ist und ein quasierzeugendes Komplement besitzt. Mit Rogers(1967) verzichten wir auf die schwächere Forderung und beschränken uns auf quasierzeugenden Funktionen per definitionem auf totale.

Definition: A heißt q-kreativ, falls

(i) A rekursiv aufzählbar;

(ii) es eine rekursive Funktion f gibt derart, daß für alle x gilt:

$$\omega_x \subset \bar{A} \implies D_{f(x)} \subset \bar{A} \text{ \& } D_{f(x)} \not\subset \omega_x.$$

Eine rekursiv aufzählbare Menge ist demzufolge q-kreativ, wenn sich zu jedem rekursiv aufzählbaren Index einer rekursiv aufzählbaren Teilmenge ihres Komplements effektiv eine Zahl so bestimmen läßt, daß auch die endliche Menge mit dieser Zahl als kanonischem Index im Komplement der rekursiv aufzählbaren Teilmenge, nicht aber in ihr selbst enthalten ist. - Shoenfield

zeigt, daß auf eine quasierzeugende Menge A jede rekursiv aufzählbare Menge tt-reduzierbar ist, und notiert als Korollar, daß jede quasikreative Menge tt-vollständig ist (a.a.O. S.965f.). Wir aber wollen uns hier auf die Untersuchung q-kreativer Mengen in bezug auf $\leq_q$ beschränken.

Lemma: $A \text{ q-kreativ} \iff A^q \text{ kreativ.}$

Beweis: " $\implies$ ": Sei A q-kreativ.

(i) Um zu zeigen, daß $A^q = \{x \mid D_x \cap A \neq \emptyset\} \times \mathbb{N}$ rekursiv aufzählbar ist, zähle A auf. Sei etwa $A = \text{range } f$ mit rekursivem f. Dann ist $A^q = \{x \mid D_x \cap \text{range } f \neq \emptyset\} \times \mathbb{N}$. Dann erhalten wir mittels des folgenden Verfahrens eine Liste für A^q :

1. Schritt: Bilde die (endliche) Menge S_1 aller Indizes der - endlich vielen - Teilmengen von $\{0,1,\max\{f(0),f(1)\}\}$, in denen mindestens ein Element aus $\{f(0),f(1)\}$ vorkommt, und nehme alle Paare $\langle x,m \rangle$ mit $x \in S_1$ und $m \leq 1$ zur Liste von A^q .

⋮

n-ter Schritt: Bilde die endliche Menge S_n aller Indizes der - endlich vielen - Teilmengen von $\{0,1,\dots,\max\{f(0),f(1),\dots,f(n)\}\}$, in denen mindestens ein Element aus $\{f(0),\dots,f(n)\}$ vorkommt, und nehme alle Paare $\langle x,m \rangle$ mit $x \in S_n$ und $m \leq n$ zur Liste von A^q .

⋮

Da man für jedes n die Werte $f(0),\dots,f(n)$ berechnen und deren Maximum finden, sodann alle Teilmengen des Abschnitts von $\mathbb{N}$ bis zu diesem bilden und deren kanonische Indizes ermitteln kann, ist dieses Verfahren effektiv.

(ii) Zu zeigen: $\overline{A^q} = \{x \mid D_x \subset \overline{A}\} \times \mathbb{N}$ ist erzeugend.-

Nach Voraussetzung gibt es ein rekursives g derart, daß für alle x gilt:

$W_x \subset \overline{A} \implies D_{g(x)} \subset \overline{A} \text{ \& } D_{g(x)} \not\subset W_x$. Sei ferner h rekursiv mit $W_{h(x)} = \overline{\{z \mid \exists \langle y,u \rangle \in W_x [z \in D_y]\}}$. Dann gilt für $f(x) = \langle g(h(x)), 0 \rangle$: $W_x \subset \overline{A^q} \implies \forall \langle y,u \rangle \in W_x [D_y \subset \overline{A}] \implies \forall z \in W_{h(x)} [z \in \overline{A}]$, also $W_{h(x)} \subset \overline{A} \implies D_{g(h(x))} \subset \overline{A} \text{ \& } D_{g(h(x))} \not\subset W_{h(x)} = \{z \mid \exists \langle y,u \rangle \in W_x [z \in D_y]\} \implies \langle g(h(x)), 0 \rangle \in A^q \text{ \& } D_{g(h(x))} \not\subset W_{h(x)} \implies f(x) \in A^q \text{ \& } \forall \langle \langle g(h(x)), u \rangle \rangle \notin W_x$, insbesondere $f(x) \notin W_x \implies f(x) \in A^q \setminus W_x$; d.h. f ist erzeugende Funktion für A^q .

" $\Leftarrow$ ": Sei A^q kreativ.

(i) Da $A \leq_1 A^q$, und A^q rekursiv aufzählbar, ist A rekursiv aufzählbar.

($A = \{x \mid \langle 2^x, 0 \rangle \in A^q\}$.)

(ii) Sei A^q erzeugend vermöge g als erzeugender Funktion. Zu zeigen: Es gibt

ein rekursives f derart, daß für alle x: $W_x \subset \overline{A} \implies D_{f(x)} \subset \overline{A} \text{ \& } D_{f(x)} \not\subset W_x$. Sei h rekursiv mit $W_{h(x)} = \{\langle y,n \rangle \mid D_y \subset W_x \text{ \& } n \in \mathbb{N}\}$. Definiere $\pi_1 = \pi_1 \circ g \circ h$; dann ist f rekursiv, und für $W_x \subset \overline{A}$ gilt: $W_{h(x)} \subset A^q \implies g(h(x)) \in A^q \text{ \& } W_{h(x)} \not\subset A^q \implies g(h(x)) \in \overline{A^q} \text{ \& } g(h(x)) \notin W_{h(x)} \implies D_{\pi_1(g(h(x)))} \subset \overline{A} \text{ \& } D_{\pi_1(g(h(x)))} \not\subset W_{\pi_1(g(h(x)))x} \implies D_{f(x)} \subset \overline{A} \text{ \& } D_{f(x)} \not\subset W_x$. Q.e.d.

Satz 3: A q-vollständig $\iff A$ q-kreativ.

Beweis: " $\implies$ ": Sei A q-vollständig. D.h. per definitionem: $\forall B [B \leq_q A]$ (für rekursiv aufzählbare B). Dann folgt - wegen $A \leq_1 A^q$ - für alle rekursiv aufzählbaren B , daß $B \leq_q A^q$, und daraus mit Satz 2, §6.2, daß $B \leq_1 A^q$. Also ist A^q per definitionem 1-vollständig und damit kreativ. Dann ist aufgrund des Lemmas A q-kreativ.

" $\impliedby$ ": Sei A q-kreativ, d.h. nach dem Lemma, daß A^q kreativ. Dann ist - unserer Bemerkung auf S.54f. zufolge - A^q m-vollständig. und daher auch q-vollständig. Wegen $A^q \equiv_q A$ ist also auch A q-vollständig.

Satz 4: A q-kreativ $\implies A$ nicht schlicht.

Beweis: Sei A q-kreativ, und f rekursiv mit $\forall x [w_x \subset \bar{A} \implies D_{f(x)} \subset \bar{A} \text{ \& } D_{f(x)} \not\subset w_x]$. Seien zudem g, h rekursiv mit $w_{g(x)} = D_x$, sowie $D_{h(x,y)} = D_x \cup D_y$. Definiere die Funktion F induktiv durch

$$\begin{cases} F(0) = 0, \text{ und} \\ F(n+1) = h(f(g(F(n))), F(n)). \end{cases}$$

Dann ist F rekursiv, und es gilt: $D_{F(0)} = \emptyset$, sowie $D_{F(n+1)} = D_{h(f(g(F(n))), F(n))} = D_{f(g(F(n)))} \cup D_{F(n)}$. Insbesondere: $D_{F(0)} \not\subseteq D_{F(1)} \not\subseteq \dots \not\subseteq D_{F(n)} \not\subseteq D_{f(n+1)} \not\subseteq \dots \subseteq \bar{A}$.

Es gibt daher eine rekursive Funktion G mit $G(x) = \mu z [z \in D_{F(x+1)} \setminus D_{F(x)}]$.

Da G injektiv, ist $\text{range } G$ eine unendliche rekursiv aufzählbare Teilmenge von $\bar{A}$, und somit A nicht schlicht.

Satz 5: Die q-vollständigen Mengen fallen nicht mit den tt-vollständigen zusammen; daher unterscheiden sich $\leq_q$ und $\leq_{tt}$ auf den nicht-rekursiven, rekursiv aufzählbaren Mengen.

Beweis: Die Menge S^* ist tt-vollständig, nicht hingegen, da schlicht, q-vollständig. - Es gilt $K \equiv_{tt} S^*$, nicht aber $K \leq_q S^*$, da sonst S^* q-vollständig. -

KAPITEL VII: Diskussion formal verschiedener Präzisierungen der Turing-Reduzierbarkeit

§7.1 Arbeitsübersicht

Wie das Beispiel der zwar nicht wahrheitsfunktionalen, aber doch intuitiv überzeugenden Reduktion der Menge $\tilde{K}$ auf K in §4.4 (vgl. S.107f.) beweist, können wir die tt -Reduzierbarkeit, wenngleich als die bislang allgemeinste, so doch keineswegs als endgültig befriedigende Präzisierung dessen betrachten, was wir von Anfang an im informellen Sinn unter "Reduzierbarkeit" verstanden. Wir wollen nun in diesem Kapitel als allgemeinste Präzisierung des intuitiven Begriffs die **T u r i n g - R e d u z i e r b a r k e i t** definieren. Dazu gehen wir - zu Beginn von §7.2 - von dem erwähnten Beispiel aus, um mit seiner Hilfe den Begriff des "relativen Algorithmus" (bzw. der "relativen Rekursivität") zu präzisieren. Ist dies getan, dann läßt sich definieren: A "Turing-reduzierbar" auf B :gdw. A ist "rekursiv in" B :gdw. es gibt einen Algorithmus relativ zu B, der c_A berechnet.

Motivationshalber gehen wir mit Rogers(1967) von der Charakterisierung relativer Algorithmen durch **T u r i n g m a s c h i n e n m i t O r a k e l** (- im folgenden auch einfach "Orakelmaschinen" genannt) aus und bezeichnen die partielle Funktion, welche von der Orakelmaschine mit dem Index z (in Zeichen: P'_z - in Analogie zu unserer Charakterisierung der Turingmaschinen durch die Vorschriftenmengen P_x in §1.1, S.10) relativ zur Menge X berechnet wird, mit ψ_z^X . Dann präzisieren wir - mehr oder weniger informell insofern, als wir auf die formale Darstellung der Orakelmaschinen (wie schon der Turingmaschinen) verzichten:

- Algorithmus relativ X (i.e. die relativ zu X partiell rekursive Funktion):
- (1) $\psi_z^X(x) = y \iff$ Die Orakelmaschine P'_z mit Orakel bzgl. X liefert in Anwendung auf den Input x den Output y ;
- (2) $A \leq_0 B \iff$ Es gibt ein z derart, daß $c_A = \psi_z^B$;
und nennen in diesem Fall A "über Orakelmaschinen" auf B "reduzierbar";
insbesondere, falls $c_A = \psi_z^B$, $A \leq_0 B$ via z .-

Dann ist, wenn $A \leq_0 B$, A auch im intuitiven Sinn auf B reduzierbar, und umgekehrt. Denn sei etwa $A \leq_0 B$ via z , d.h. $c_A = \psi_z^B$; dann ist, wenn B rekursiv, ψ_z^B als totale Funktion rekursiv - und damit c_A .- Hingegen haben wir für die umgekehrte Richtung eine **R e l a t i v i e r t e T h e s e** v o n C h u r c h (für Orakelmaschinen) in Anspruch zu nehmen: die These, daß $\leq_0$ den intuitiven Begriff in seiner vollen Allgemeinheit erfaßt; genauer: daß, wenn A intuitiv auf B reduzierbar ist, auch $A \leq_0 B$ gilt. Diese zugestanden, bildet $\leq_0$ genau die Präzisierung des intuitiven Reduzierbarkeitsbegriffs in ihrer allgemeinsten Form.-

Wenn nun die Relation $\leq_0$ - was ihre formale (!) Darstellung betrifft - als Präzisierung für uns dennoch unbefriedigend bleibt, so liegt dies einfach daran, daß sie aufgrund uns neuer Begriffe - i.e. eben des formalen Orakelmaschinenkonzepts - definiert ist, weshalb die von uns bisher entwickelten (und demzufolge auch die bisherigen Resultate) für die so entstehende relative Theorie nicht verwertet werden können. Wir entfernen uns daher - mit Rogers - sowohl bei der Präzisierung des Begriffs des relativen Algorithmus, als auch des der durch ihn induzierten Reduzierbarkeit $\leq_0$ von den Charakterisierungen (1) und (2), um ihn stattdessen rein syntaktisch über den - uns weit vertrauteren - Begriff der rekursiv aufzählbaren Menge zu definieren. "Although the oracle-machine characterization is", bemerkt Rogers, "in certain respects, more intuitive than ours, our characterization has the virtue that it depends only on concepts already defined and can be used informally without the necessity of a new, relativized Church's Thesis". "Obwohl die Charakterisierung durch Orakelmaschinen in gewisser Hinsicht intuitiv einsichtiger ist, so hat die unsrige doch den Vorzug, daß sie lediglich von bereits definierten Begriffen abhängt und informell ohne die Notwendigkeit einer neuen, relativierten These von Church verwendet werden kann"; (a.O. S.133).

Rogers' Plan besteht nun darin, die Definition der relativen Rekursivität sowie die der dadurch bedingten Reduzierbarkeit rein syntaktisch über rekursiv aufzählbare Mengen ganz spezifischer Gestalt zu leisten. Zugrunde liegt die Idee, die Funktionsweise der Orakelmaschinen durch rekursiv aufzählbare Mengen zu kodieren: "Our characterization of relative algorithm takes a different route. In order to motivate it, we first show, informally, how the oracle-machine characterization leads to it" (ebd. S.130). Wir rekapitulieren seine Ausführungen weiter in §7.2. Man erzeugt, ausgehend von den Orakelmaschinen P_z^1 und den von ihnen relativ zu Mengen X berechneten partiellen Funktionen, zu gegebenem Input x effektiv ein Diagramm, welches alle möglichen Berechnungen von $\varphi_z^X(x)$ beschreibt. Durch Kodierung solcher Diagramme entwickelt nun Rogers - in effektiver Abhängigkeit vom Maschinenindex z - rekursiv aufzählbare Mengen $W_{h(z)}$ von kodierten Quadrupeln (wobei die rekursive Funktion h für die effektive Erzeugbarkeit des entsprechenden Diagramms aus den Maschinenindizes steht). "This suggests", folgert Rogers, "that we can characterize relative algorithms in terms of appropriate recursively enumerable sets" (ib. S.131). Über die Mengen $W_{h(z)}$ lassen sich dann (1) und (2) durch die folgenden Präzisierungen ersetzen:

- Algorithmus relativ X (die relativ zu X partiell rekursive Funktion):

3) $\varphi_z^X(x) = y \iff \exists u, v [\langle x, y, u, v \rangle \in W_{h(z)} \text{ \& } D_u \subset X \text{ \& } D_v \subset \bar{X}]$; sowie

4) $A \leq_0 B \iff \exists z [c_A = \varphi_z^B] \iff$

$$\Leftrightarrow \exists z \forall x, y [(x, y) \in c_A \Leftrightarrow \exists u, v [\langle x, y, u, v \rangle \in W_{h(z)} \ \& \ D_u \subset B \ \& \ D_v \subset \bar{B}]]$$

(wobei wir die Sprechweise " $A \leq_0 B$ via z " beibehalten).

Daß indes mit diesem ersten Schritt auf dem Wege zur Charakterisierung der Turing-Reduzierbarkeit durch die Zurückführung auf rekursiv aufzählbare Mengen das Ziel noch nicht erreicht ist, beruht auf der einfachen Feststellung, daß die rekursiv aufzählbaren Mengen, kraft derer sich die relevanten Begriffe vom Orakelmaschinenkonzept emanzipieren sollten, ja gerade in unmittelbarer Abhängigkeit von diesem präzisiert wurden. Mit anderen Worten: Bei ihrer Definition kann so lange nicht als von einer "rein syntaktischen" die Rede sein, als noch in irgendeiner Weise auf Orakelmaschinen zurückgegriffen wird. Daher muß Rogers im nächsten Schritt versuchen, von den Mengen $W_{h(z)}$ deren spezifische Eigenschaften - und zwar wenngleich im Hinblick auf die Gestalt der Diagramme, so doch begrifflich von ihnen unabhängig - zu abstrahieren. Dies motiviert - über den Begriff des "konsistenten" (kodierten) Quadrupels sowie den der "Kompatibilität" von je zwei Quadrupeln - die Definition sogenannter regulärer Mengen. Dann ist, wie man leicht sieht, jede Menge $W_{h(z)}$ regulär. Doch genügt dies allein noch nicht für die intendierte Charakterisierung; denn die Äquivalenz der beiden Konzepte ist erst dann gesichert, wenn auch die Umkehrung zutrifft, d.h. jede per definitionem reguläre Menge die Funktionsweise einer Orakelmaschine kodiert. Genau dies behauptet der - von Rogers in dieser Form zitierte - "Satz von Blum: Zu jeder regulären Menge A existiert eine Zahl z derart, daß $A = W_{h(z)}$ " (vgl. a.a.O. S.155). So gelangt man mithilfe der von Rogers eingeführten "Regularisierungsfunktion" ρ zu einer (2) und (4) analogen, diesmal jedoch rein syntaktischen Charakterisierung von $\leq_0$ vermöge

(5) $A \leq_0 B \Leftrightarrow \exists z \forall x, y [(x, y) \in c_A \Leftrightarrow \exists u, v [\langle x, y, u, v \rangle \in W_{\rho(z)} \ \& \ D_u \subset B \ \& \ D_v \subset \bar{B}]]$
(i.e. " $A \leq_0 B$ via z ").

Doch erweist sich, wie wir als eines der ersten wesentlichen Resultate zeigen werden, der "Satz von Blum" als falsch: Nicht jede reguläre Menge kodiert die Diagramme eines Orakelmaschinenprogramms; d.h. es gibt eine reguläre Menge A mit $A \neq W_{h(z)}$ für alle z . Ein einfaches Beispiel einer solchen Menge werden wir in §7.2 angeben. Damit ist aber in (5) die Implikation von rechts nach links nicht mehr unmittelbar plausibel, - es sei denn, man beruft sich auf die Relativierte These von Church. Warum aber ein Bezug auf diese hier äußerst fragwürdig bis unzulässig erscheint, werden wir weiter unten genauer erläutern. - Wir erkennen daran, daß die von Rogers definierten regulären Mengen keineswegs das von ihm Gewünschte leisten - und demzufolge in ihrer Form der Versuch einer rein syntaktischen Charakterisierung der Turing-Reduzierbarkeit als mißlungen angesehen werden muß. Nichtsdestoweniger ist Rogers' Definition, da zumindest so allgemein wie $\leq_0$, als gültige Prä-

isierung des intuitiven Reduzierbarkeitsbegriffs (rein formal) zu akzeptieren. Wir behalten daher seine Definition der relativ zu X partiell rekursiven Funktion $\mathcal{P}_z^X$, sowie des dadurch bedingten Reduzierbarkeitsbegriffs $\leq_T$ bei und präzisieren in Analogie zu (1) und (2), bzw. (3) und (4) in terminologischer bereinstimmung:

- Algorithmus relativ X :

$$(6) \mathcal{P}_z^X(x) = y : \Leftrightarrow \exists u, v [\langle x, y, u, v \rangle \in \mathcal{P}_{p(z)} \text{ \& } D_u \subset X \text{ \& } D_v \subset \bar{X}]$$

(i.e. die "partiell X -rekursive Funktion"); sowie:

- A Turing-reduzierbar auf B :

$$(7) A \leq_T B \Leftrightarrow \exists z [c_A = \mathcal{P}_z^B] \Leftrightarrow \exists z \forall x, y [\langle x, y \rangle \in c_A \Leftrightarrow \exists u, v [\langle x, y, u, v \rangle \in \mathcal{P}_{p(z)} \text{ \& } D_u \subset B \text{ \& } D_v \subset \bar{B}]]$$

Wenn $c_A = \mathcal{P}_z^B$, so " $A \leq_T B$ via z ".

Wir verwenden den Index "T" (von "Turing"-Reduzierbarkeit), um uns damit nicht nur insbesondere auf Rogers' Präzisierung durch (7), vielmehr allgemein auf die Turing-Reduzierbarkeit zu beziehen - auch wenn wir später, nachdem wir in $\leq_S$ bzw. $\leq_W$ wenigleich formal äquivalente, so doch intuitiv adäquatere und für formale Beweise bequemere Präzisierungen gefunden haben, auf diese zurückgreifen werden. Wie sich leicht zeigen läßt, gilt für $\leq_T$:

$$(8) A \leq_O B \Rightarrow A \leq_T B ; \text{ sowie}$$

$$(9) A \leq_T B \Rightarrow A \text{ ist intuitiv auf } B \text{ reduzierbar.}$$

Demzufolge ist $\leq_T$ nicht nur eine - zumindest rein formal - gültige Präzisierung des intuitiven Reduzierbarkeitsbegriffs, sondern darüberhinaus als solche mindestens so allgemein wie die durch $\leq_O$ nach (2). Unterstellt man daher die oben explizierte Relativierte Church'sche These, die die volle Übereinstimmung von $\leq_O$ mit dem intuitiven Reduzierbarkeitskonzept postuliert, so ist aus (8) und (9) tatsächlich die - von Rogers intendierte - Äquivalenz von $\leq_T$ und $\leq_O$ zu schließen. Wir haben damit den etwas kuriosen Sachverhalt vor uns, daß Rogers, obgleich mit seiner Definition von $\leq_T$ die eigentliche Intention seiner rein syntaktischen Formalisierung - i.e. die Kodierung der Funktionsweise von Orakelmaschinen durch rekursiv aufzählbare Mengen - verfehrend, mit ihr nichtsdestoweniger eine zwar willkürliche, doch immerhin rein formal gültige und mutatis mutandis rein syntaktische Präzisierung des intuitiven Reduzierbarkeitsbegriffs erzielt. Die Frage, welche dadurch nahegelegt wird, ist die nach der Äquivalenz der beiden Formalisierungen: Gilt in (8) auch die Implikation von rechts nach links? Wäre dies nicht der Fall, so würde dies nichts weniger bedeuten, als daß auch $\leq_O$ - wie $\leq_m$, $\leq_{tt}$ etc. - eine wennzwar verträgliche, aber doch zu enge Präzisierung des intuitiven Reduzierbarkeitsbegriffs wäre - im eklatanten Widerspruch zum 'common sense' unserer Theorie. Nehmen wir die Relativierte Church'sche These zuhilfe, so

erhalten wir per se eine positive Antwort auf unsere Frage. Doch versteht es sich von selbst, daß wir gerade hier die These nicht benutzen dürfen: Erst der exakt geführte Beweis, daß jede gefundene Präzisierung des intuitiven Reduzierbarkeitsbegriffs, welche formal allgemeiner ist als $\leq_0$ (- und dies gerade gilt, wie wir in (8) vermerkten, für $\leq_T$), mit dieser äquivalent ist, berechtigt uns dazu, die Relativierte These von Church zu akzeptieren. Die Aufgabe, die sich uns nach Aufdeckung der nicht fraglosen Definitionen (6) und (7) stellt, besteht daher in zweierlei: der Korrektur von Rogers' Definitionen in dem Sinn, daß sie seiner ursprünglichen Intention - i.e. relative Algorithmen und den daraus resultierenden Reduzierbarkeitsbegriff rein syntaktisch durch geeignete rekursiv aufzählbare Mengen (als Kodierung der Arbeitsweise von Orakelmaschinen) zu charakterisieren - gerecht werden, zum einen, und zum andern (als nicht zuletzt desiderables Argument für die Plausibilität der Relativierten These von Church) in dem direkten formalen Beweis - d.h. ohne zu irgendwelchen intuitiven Plausibilitätsbetrachtungen Zuflucht zu nehmen - der oben angeführten Implikation. Zudem ergibt sich aus Rogers' ambivalenter Charakterisierung, die einerseits nicht stark genug ist, $\leq_0$ durch die Kodierung von Orakelmaschinen zu beschreiben, und andererseits doch so allgemein, $\leq_0$ zu implizieren, die weitere Fragestellung: inwieweit man die Definitionsbedingungen für die regulären Mengen zu verstärken hat, um besagte Kodie-

((weiter auf Seite 141!))

ung tatsächlich zu erreichen, und wie weit man sie, umgekehrt, abschwächen darf, wenn man, ohne irgend auf die Funktionsweise von Orakelmaschinen zu rekurrieren, lediglich eine rein syntaktische Charakterisierung relativer Algorithmen und der Turing-Reduzierbarkeit durch rekursiv aufzählbare Mengen im Sinne hat?

Im folgenden ist jedem dieser Probleme ein eigener Paragraph gewidmet. Wir werden wir als erstes in §7.3 relative Algorithmen und den durch sie induzierten Reduzierbarkeitsbegriff rein syntaktisch durch eine etwas modifizierte Kodierung der oben besprochenen Diagramme charakterisieren. Die dabei auftretenden, per definitionem stark regulären Mengen bestehen nicht, wie die regulären Rogers', aus kodierten Quadrupeln (deren letzten beiden Komponenten zwar zu entnehmen ist, für welche Zahlen das Orakel befragt wurde, nicht aber die Reihenfolge, in der dies geschah), sondern aus (kodierten) Tripeln, deren letzte Komponenten die Kodierungen sogenannter N -Folgen bilden, die auch noch die fragliche Reihenfolge festhalten. Durch Abstraktion der Eigenschaften dieser so motivierten - und ebenfalls rekursiv aufzählbaren - Mengen $W_{h'}(z)$ gelangen wir - über den Begriff der Verträglichkeit von N -Folgen - zur Definition eben der stark regulären Mengen, für die wir dann (in §7.3) den "Satz von Blum" (in seiner korrigierten Fassung!) tatsächlich beweisen können. Insgesamt folgt, daß nicht nur jede Menge $W_{h'}(z)$ - als Kodierung der Arbeitsweise von P'_z - stark regulär ist, sondern sich auch umgekehrt zu jeder stark regulären Menge A eine Zahl z mit $A \subseteq W_{h'}(z)$ finden läßt. So erreichen wir anhand der stark regulären Mengen, die Rogers mit den regulären mißglückte: eine rein syntaktische Charakterisierung der Arbeitsweise von Orakelmaschinen. Wie im Fall der $W_h(z)$ und regulären $W_p(z)$ läßt sich - vermöge einer der Regularisierungsfunktion ρ entsprechenden "starken Regularisierungsfunktion" ρ' - analog (3) und (6) auch für die stark regulären $W_{\rho'}(z)$ präzisieren:

- Algorithmus relativ X (die in X partiell rekursive Funktion) durch
 0) $\phi_z^X(x) = y \iff \exists w [\langle x, y, w \rangle \in W_{\rho'(z)} \text{ \& } D_{\rho'(w)} \subseteq X \text{ \& } D_{\rho''(w)} \subseteq \bar{X}]$
 (wobei w eine N -Folge kodiert, und ρ' und ρ'' als rekursive Funktionen geeignet definiert sind); sowie

- A Turing-reduzierbar auf B , laut

$$1) A \leq_B B \iff \exists z [c_A = \phi_z^B] \iff \exists z \forall x, y [(x, y) \in c_A \iff \exists w [\langle x, y, w \rangle \in W_{\rho'(z)} \text{ \& } D_{\rho'(w)} \subseteq B \text{ \& } D_{\rho''(w)} \subseteq \bar{B}]]$$

Wieder heißt, falls $c_A = \phi_z^B$, $A \leq_B B \forall i \text{ a } z$.

(Wir folgen in der Definition von $\leq_B$ einem Vorschlag von Prof. Dr. U. Blum während seines Seminars über Rekursionstheorie im Sommersemester 1978.) Als Verallgemeinerung des (korrigierten) Satzes von Blum beweisen wir abschließend von §7.3 die Äquivalenz von $\leq_0$ und $\leq_B$.

Aufgrund dieser Äquivalenz wäre nun im folgenden Paragraphen unser anderes Ziel: der direkte Beweis der Implikation von $\leq_0$ durch $\leq_T$ (und damit der der Äquivalenz der beiden Charakterisierungen) ohne Zuhilfenahme der Relativierten These von Church, am schnellsten dadurch zu erreichen, daß wir ihn auf den der Implikation von $\leq_B$ durch $\leq_T$ reduzierten - d.h. zu jeder regulären Menge $W_{\rho(z)}$ effektiv eine stark reguläre Menge $W_{\rho'(z')}$ angäben mit der Eigenschaft, daß, wenn $A \leq_T B$ via z , $A \leq_B B$ via z' . Wenn wir dennoch nicht diesen Weg wählen, so aus zwei Gründen. Ein rein technischer besteht darin, daß für die Relation $\leq_T$, und ganz zu schweigen von $\leq_B$, der Nachweis der Transitivität - auf den wir ja bei keiner der zur Diskussion stehenden Präzisierungen des Reduzierbarkeitsbegriffs verzichten wollen - noch unnötig kompliziert erscheint. Der andere, eigentliche Grund aber erhellt im Hinblick auf unser weiteres Ziel (vgl. S.140f.) und das bereits zur Geltung gebrachte Argument, daß es nun, nachdem Rogers' Definition von $\leq_T$ über reguläre Mengen nicht die intendierte Bedeutung gewann und daher mehr oder weniger arbiträr anmuten muß, nicht länger sinnvoll scheint, ihr mehr als einen allenfalls heuristischen Wert beizulegen. Von ungleich größerem theoretischen Interesse ist, wie bereits bemerkt, demgegenüber das Problem, inwiefern die solcherart im nachhinein uninteressant scheinenden regulären Mengen durch andere rekursiv aufzählbare Mengen sinnvoll zu ersetzen sind. Um Rogers' eigentliche Intention zu erfüllen, hatten wir die Bedingung der Regularität zu der der starken Regularität zu verstärken; umgekehrt aber liegt es nun nahe, die komplementäre Frage, wie weit sie abgeschwächt werden darf, sofern noch eine gültige Präzisierung des Reduzierbarkeitsbegriffs durch sie gewährleistet sein soll, gleich in ihrer radikalsten Form zu stellen: ob nicht bereits durch die Ersetzung regulärer Mengen durch *b e l i e - b i g e* rekursiv aufzählbare Mengen eine im Sinne des intuitiven Begriffs akzeptable Reduktion zu definieren sei? Wie man sofort erkennt, fällt die Antwort positiv aus. Dies führt uns - in §7.4 - vorweg zu der folgenden Präzisierung:

- A Turing-reduzierbar auf B gemäß

$$(12) A \leq_w B \iff \exists z \forall x, y \left[(x, y) \in c_A \iff \exists u, v \left[\langle x, y, u, v \rangle \in W_z \text{ \& } D_u \subset B \text{ \& } D_v \subset \bar{B} \right] \right]$$

(wobei der Index "w" sich auf unsere kanonische Bezeichnung rekursiv aufzählbarer Mengen als W_z bezieht).

Wieder sagen wir dann: $A \leq_w B$ via z .

Wie wir (in §7.4) trivialerweise zeigen, gilt:

$$(13) A \leq_T B \implies A \leq_w B; \text{ sowie}$$

$$(14) A \leq_w B \implies A \text{ ist intuitiv auf B reduzierbar.}$$

Demzufolge finden wir im Fall von $\leq_T$ und $\leq_w$ die gleiche Situation vor

le - in (8) und (9) - bei $\leq_0$ und $\leq_T$: nicht nur, daß $\leq_w$ eine plausible Präzisierung des intuitiven Reduzierbarkeitskonzepts darstellt - es ist diese zudem mindestens so allgemein wie $\leq_T$ (und damit, nach (8), wie $\leq_0$!). Unbeschadet der Eigenschaften regulärer oder stark regulärer Mengen - heißt dies -, reicht zur Präzisierung des Reduzierbarkeitsbegriffs schon der Rückgriff auf beliebige rekursiv aufzählbare Mengen aus. Klar, daß $\leq_w$ die allgemeinste Charakterisierung der Turing-Reduzierbarkeit mithilfe rekursiv aufzählbarer Mengen darstellt, wobei diese von der Definition her nicht nur natürlicher als die vorangehenden, sondern nachgerade als eine der natürlichsten überhaupt erscheint! - Wenn wir nun $\leq_w$ dennoch nicht schon in §7.4, sondern erst in §7.6 ausführlich behandeln, so wieder aus zwei Gründen. Der eine, rein technische, liegt darin, daß der direkte Nachweis der Implikation " $A \leq_w B \implies A \leq_B B$ " - und damit von " $A \leq_w B \implies A \leq_0 B$ " ohne Zuhilfenahme der Relativierten Church-Turing'schen These, auf den wir zugunsten von deren Plausibilität ja ebenso wenig verzichten können wie auf den von " $A \leq_T B \implies A \leq_0 B$ " - allzu kompliziert erscheint, als daß seine Aufspaltung in zwei Schritte nicht, zugunsten leichter Durchschaubarkeit, geraten schiene. Der andere, und eigentliche, aber bezieht uns andere Mal auf einer theoretisch relevanteren Beobachtung: daß nämlich $\leq_w$ sich, wenngleich zur Präzisierung des intuitiven Begriffs von Reduzierbarkeit, so doch - im Unterschied zu allen bisherigen Formalisierungen - als geeignet zu der des relativen Algorithmus eignet - einer Parallelität, auf welche wir, wie die Nebeneinanderstellung der relativ zu X partiell rekursiven Funktion und des Reduzierbarkeitsbegriffs in (1) und (2), (3) und (4), (6) und (7), sowie (10) und (11) beweist, von Anfang an Wert gelegt haben. Setzen wir nämlich in Analogie zu (1), (3), (6) oder (10):

$$(15) (x, y) \in \zeta_Z^X : \iff \exists u, v [\langle x, y, u, v \rangle \in W_Z \text{ \& } D_u \subset X \text{ \& } D_v \subset \bar{X}] -$$

so ist, wie wir anhand eines einfachen Beispiels in §7.4 bemerken, die Relation ζ_Z^X im allgemeinen keine (partielle) Funktion mehr (- im eklatanten Unterschied zu ψ_Z^X , φ_Z^X und Φ_Z^X !) und mithin als Präzisierung der "in X partiell rekursiven Funktion" nicht geeignet. Wir ziehen daher in §7.4 die Diskussion des dadurch aufgeworfenen Problems, welche Eigenschaft die rekursiv aufzählbare Menge W_Z denn nun eigentlich besitzen müsse, damit ζ_Z^X (nach Definition (15)) eine partiell rekursive Funktion werde, vor und beschließen die mit der Forderung nach der folgenden, offenbar gleichermaßen notwendigen hinreichenden Bedingung:

$$(16) \langle x, y, u, v \rangle, \langle x, y', u', v' \rangle \in W_Z^{\text{konsistent}} \text{ \& } y \neq y' \implies (D_u \cap D_{v'}) \cup (D_{u'} \cap D_v) \neq \emptyset$$

einer Eigenschaft also, welche unter anderem je zwei verschiedenen Elementen einer nach Rogers' Definition regulären Menge eigen sein mußte. Dies beantwortet unsere Frage, wie weit die Definitionsbedingungen der Regularität abzuschwächen wären (vgl. S.141). Wir haben festzustellen, daß, was unser

Ziel der Präzisierung des Begriffs des relativen Algorithmus (i.e. der in X partiell rekursiven Funktion) zum einen, und das der Präzisierung des allgemeinen Reduzierbarkeitsbegriffs zum andern durch eine rein syntaktische Charakterisierung vermöge geeigneter rekursiv aufzählbarer Mengen betrifft, letztendlich eine Divergenz besteht: Während wir im Fall des letzteren auf beliebige rekursiv aufzählbare Mengen zurückgreifen können, müssen wir - in Form der Bedingung (16) - bei ersterem gewisse Einschränkungen hinnehmen. Ist es uns lediglich um die möglichst allgemeine Definition der Turing-Reduzierbarkeit durch rekursiv aufzählbare Mengen zu tun, so kommen wir mit den beliebigen W_z in (12) aus; geht es uns aber gleichzeitig auch um eine entsprechende für den relativen Algorithmus, dann sehen wir uns auf solche W_z angewiesen, welche (16) erfüllen. Damit haben wir schließlich genau die Grenzen abgesteckt, die uns auf dem Wege der Abschwächung der Definitionsbedingungen für reguläre Mengen objektiv gezogen sind. Wir erkennen im nachhinein, daß unsere diesbezügliche Frage (vgl. S.141 oben) nicht ganz präzise gestellt war: das "und" in ihrer Formulierung ist nicht unbedingt im Sinne einer gleichzeitigen Charakterisierung der zwei fraglichen Begriffe aufzufassen. Je nachdem, auf welchen von beiden man die Priorität legt, hat man restriktiver oder liberaler zu verfahren.- Der Begriff, zu dem wir gelangen, wenn wir (16) als definitorische Bedingung verwenden, ist zum einen der der schwach regulären Menge, und sodann der der durch sie charakterisierten in X partiell rekursiven Funktion nebst dem induzierten Reduzierbarkeitsbegriff $\leq_B$. Unter Verwendung einer den rekursiven Funktionen $\wp$ und $\wp'$ analogen "schwachen Regularisierungsfunktion" $\wp$ erhalten wir so nicht nur in

$$(17) (x,y) \in \wp_z^X : \Leftrightarrow \exists u,v [\langle x,y,u,v \rangle \in W_{\wp(z)} \text{ \& } D_u \subset X \text{ \& } D_v \subset \bar{X}]$$

eine gültige Definition der in X partiell rekursiven Funktion $\wp_z^X$ (i.e. des zu X relativen Algorithmus), sondern gleichzeitig auch - analog zu (2),(4), (5),(7),(11) und (12) - in

$$(18) A \leq_B B : \Leftrightarrow \exists z [c_A = \wp_z^B] \\ \Leftrightarrow \exists z \forall x,y [(x,y) \in c_A \Leftrightarrow \exists u,v [\langle x,y,u,v \rangle \in W_{\wp(z)} \text{ \& } D_u \subset B \text{ \& } D_v \subset \bar{B}]]$$

eine rein syntaktische Präzisierung des intuitiven Reduzierbarkeitsbegriffs (i.e. der Turing-Reduzierbarkeit) durch rekursiv aufzählbare Mengen, die - sofern auch (17) noch seiner Intention gerecht werden soll - gleichzeitig so allgemein wie möglich und so eng wie nötig ist. Wieder heißt, wenn $c_A = \wp_z^X$, $A \leq_B B$ v i a z.

Da jede reguläre Menge schwach regulär, und jede schwach reguläre jedenfalls rekursiv aufzählbar ist, erhalten wir folgende Kette von Implikationen

$$(19) A \leq_T B \Rightarrow A \leq_S B \Rightarrow A \leq_W B.$$

"Effektiviert", bedeutet diese Aussage die Existenz rekursiver Funktionen f und g derart, daß, wenn $A \leq_T B$ via z , $A \leq_S B$ via $f(z)$, und $A \leq_S B$ via z , $A \leq_W B$ via $g(z)$. -

Nachdem wir so in §7.4 $\leq_W$ und $\leq_S$ eingeführt haben, verwenden wir die beiden folgenden Paragraphen auf den Nachweis, daß beide Präzisierungsn $\leq_0$ implizieren, und zwar jeweils ohne Zuhilfenahme der Relativierten Churchschen These. Nach unserem Resultat in §7.3 ist es klar, daß wir uns dabei auf die Charakterisierung von $\leq_0$ durch $\leq_B$ beziehen werden. Wie bereits angedeutet (vgl. S.143), besteht unser Vorgehen in zwei Schritten. Zuerst beweisen wir in §7.5 die Implikation von $\leq_B$ durch $\leq_S$, indem wir zu jeder schwach regulären Menge $W_{\phi(z)}$ effektiv eine stark reguläre Menge $W_{\phi'(z')}$ angeben derart, daß, wenn $A \leq_S B$ via z , $A \leq_B B$ via z' . Da nach §7.3 und §7.4 $\leq_B$ die Relation $\leq_S$ impliziert, resultiert hieraus wegen " $\leq_S \Rightarrow \leq_B \Rightarrow \leq_T \Rightarrow \leq_S$ " nicht nur die unter anderem zu zeigende Implikation von $\leq_0$ durch $\leq_T$, sondern rundweg die Äquivalenz aller Präzisierungen der Turing-Reduzierbarkeit von $\leq_0$ bis $\leq_S$ - dies, da ohne die Relativierte Churchsche These direkt bewiesen, als schönes Argument für deren Plausibilität. Daß dieses jedoch inzwischen als nicht mehr genügend erscheint, beruht auf unserer Entdeckung von $\leq_W$ als einer noch allgemeineren Präzisierung der Turing-Reduzierbarkeit als $\leq_S$ (vgl. (19)). Da $\leq_W$ nach (14) eine gültige Präzisierung des intuitiven Reduzierbarkeitsbegriffs darstellt, die trivialerweise von $\leq_0$ (in Gestalt von $\leq_B$) impliziert wird, gewinnt, wie bereits bemerkt (S.143), im Fall von $\leq_W$ das gleiche Argument wie bei $\leq_T$ (vgl. S.140) neu an Aktualität: Zwar muß, wenn wir die Relativierte These von Church akzeptieren, die Implikation " $A \leq_W B \Rightarrow A \leq_0 B$ " gültig sein; umgekehrt aber scheint jene überhaupt erst dann akzeptabel, nachdem sich dies auch ohne ihre Zuhilfenahme beweisen ließ. Genau darin besteht unser zweiter Schritt. Wir zeigen in §7.6 ohne weitere Appelle an die Intuition, daß " $A \leq_W B \Rightarrow A \leq_S B$ ". Da nach (19) die Umkehrung ohnehin gilt, ist daraus die Äquivalenz von $\leq_W$ nicht nur mit $\leq_S$, sondern - kraft unseres Resultats in §7.5 - auch mit allen anderen Präzisierungen^{zu schließen}. Insgesamt erhalten wir damit die folgende Äquivalenzkette unserer fünf nur formell unterschiedlichen Präzisierungen der Turing-Reduzierbarkeit:

$$(20) A \leq_0 B \iff A \leq_B B \iff A \leq_T B \iff A \leq_S B \iff A \leq_W B.$$

Wenn wir daher in §7.6 abschließend die Reflexivität und Transitivität der Relation $\leq_W$ beweisen, so ist deren Gültigkeit für jede der fünf formalen Varianten garantiert. Wie bereits erwähnt (S.139), verwenden wir das Symbol " $\leq_T$ " als Bezeichnung der Turing-Reduzierbarkeit ohne weitere Rücklicht auf die spezifische - und längst als unmotiviert erwiesene - Form, die Rogers in (7) gab, während wir im Rahmen formaler Turing-Reduktionen uns, wenn nicht gar auf die bloße Intuition, so auf die von allen handlichste Formalisierung $\leq_W$ berufen werden.

§7.2 Rogers' "basic characterization" relativer Algorithmen; Präzisierung der Turing-Reduzierbarkeit als $\leq_T$ über reguläre Mengen

"According to our informal definition", resümiert Rogers, "one problem is *r e d u c i b l e* to another if a method for solving the second problem yields a method for solving the first" ("Entsprechend unserer informellen Definition ist ein Problem auf ein anderes *r e d u z i e r b a r*, wenn ein Verfahren zur Lösung des zweiten Problems ein Verfahren zur Lösung des ersten liefert" (a.a.O. S.77)). Haben wir solch ein Verfahren zur Lösung des zweiten Problems, so können wir das dadurch bedingte zur Lösung des ersten einen zu jenem *r e l a t i v e n A l g o r i t h m u s* nennen. Informell gesprochen, ist dann A reduzierbar auf B, wenn es einen Algorithmus relativ zu B gibt, der A entscheidet; wenn also, anders ausgedrückt, A *a l g o r i t h m i s c h r e l a t i v* zu B ist. So war im Falle von $A \leq_m B$ bzw. $A \leq_1 B$ A insofern algorithmisch relativ zu B, als man zu jeder Zahl x effektiv eine Zahl $y = f(x)$ so bestimmen konnte, daß x in A lag oder nicht, je nachdem, ob $f(x)$ in B lag oder nicht (vgl. S.37). Dagegen war im Fall von $A \leq_{tt} B$ bzw. $A \leq_{btt} B$ A algorithmisch relativ zu B insofern, als man dabei zu jeder Zahl n eine endliche Folge von Zahlen $m_1, m_2, \dots, m_v$ in Abhängigkeit von n, sowie eine Wahrheitstafel v -ter Ordnung effektiv so gewann, daß die Zeile der Tafel, die über die Zugehörigkeit der m_1 zu B entscheidet, auch richtig über die Zugehörigkeit von n zu A befindet (vgl. S.91). Nun wird jedoch akkurat an unserem Beispiel der intuitiv einleuchtenden und dabei doch nicht wahrheitsfunktionalen Reduktion von $\tilde{K}$ auf K offenbar, daß auch die tt -Reduzierbarkeit als bislang allgemeinste Präzisierung des intuitiven Reduzierbarkeitsbegriffs, geschweige denn dessen stärkere Formalisierungen, noch keine adäquate Präzisierung dieses informellen Begriffs des relativen Algorithmus - sofern dieser von jenem präsupponiert wird - darstellt. Um hier Abhilfe zu schaffen, bedarf es, als eines heuristischen Arguments, vorweg einer kurzen Analyse der Frage, worin diese intuitive Reduktion von $\tilde{K}$ auf K sich denn eigentlich von einer wahrheitsfunktionalen unterscheidet. Dabei stellen wir fest, daß, während im Fall von $A \leq_{tt} B$ zu jeder Frage bezüglich der Elementschaft von A effektiv *i m v o r a u s*, d.h. ohne weitere Fragen bzgl. B, erstens endlich viele Fragen bzgl. B, und zweitens eine Verordnung dafür, wie jede mögliche Kombination von Antworten auf eben diese die Beantwortung unserer Frage bzgl. A entscheidet, festgelegt werden konnten, - wir beim intuitiven Vorgehen tatsächlich zuerst solche Fragen bzgl. K stellen und beantworten mußten. Algorithmisch relativ zu K war dies Verfahren insofern, als zur Berechnung der charakteristischen Funktion $c_{\tilde{K}}$ von $\tilde{K}$ zuerst die Entscheidung von K erforderlich war. Galt $z \notin K$, so per definitionem $z \notin \tilde{K}$; war aber $z \in K$, so ließ die tt -Bedingung $\varphi_z(z) = ((x_1, \dots, x_n), \alpha)$, vermöge welcher " $z \in \tilde{K}$ " entschieden ward, sich überhaupt erst formulieren (S.107f.).

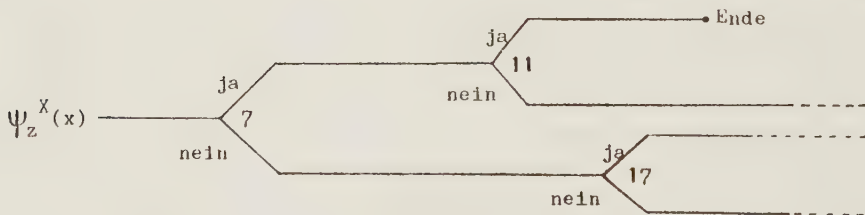
Verallgemeinern wir dieses Verfahren, so wäre ein "Algorithmus relativ X " etwa folgendermaßen zu beschreiben. Sei die Menge X beliebig gegeben. Dann ist unser Verfahren durch endlich viele Vorschriften, sowie einen gegebenen Input auf folgende Weise bestimmt. Mit dem Input beginnt eine Rechnung. Diese verläuft algorithmisch, außer daß

- a) von Zeit zu Zeit vom Rechner die Beantwortung einer Frage der Gestalt "liegt n in X ?" gefordert werden kann (wobei diese Frage selbst, das heißt der Wert von n , im allgemeinen als Ergebnis der vorangegangenen Rechnung erscheint);
- b) die gegebenen Vorschriften keinerlei Mittel zur Beantwortung solcher Fragen (bzgl. X) liefern;
- c) die Beantwortung einer Frage als ein Schritt im Gesamtverfahren zählt; und schließlich
- d) die aufeinanderfolgenden Schritte des Verfahrens gewöhnlich von dieser Antwort abhängen.

Werden derartige Antworten von irgendeiner äußeren Instanz automatisch und richtig geliefert, dann haben wir es mit einem wohldefinierten und im übrigen effektiven Berechnungsverfahren zu tun - eben mit einem Algorithmus relativ X . Ist X rekursiv, so können wir das gesamte Verfahren dadurch effektivieren, daß wir Vorschriften zur Berechnung von c_X dazufügen. (So liefern bei dem relativ zu K algorithmischen Verfahren der Reduktion von $\tilde{K}$ auf K die Vorschriften für $c_{\tilde{K}}$ keinerlei Handhabe zur Beantwortung der Frage "liegt z in K ?" - für beliebig gegebenes z -, welche doch für die Berechnung des Wertes $c_K(z)$ unbedingt notwendig war.)

Nun sind, wie bereits im Fall des (unrelativierten) Begriffs der Berechenbarkeit (vgl. Einleitung S.1, sowie §1.1 S.10), so auch in dem des relativierten formale Präzisierungen in unterschiedlicher Weise erfolgt - gewöhnlich in Form direkter Erweiterungen des ersteren. Zu nennen sind die Turingmaschinen mit "Orakel" bzw. Hilfsbändern, oder die erweiterte Kleene-Charakterisierung. Auch hier, wie vordem, spricht das Resultat der Äquivalenz aller dieser Formalisierungen dafür, daß durch jede von ihnen der Begriff des relativen Algorithmus in seiner vollen Allgemeinheit erfaßt wird - weshalb wir ohne Zögern auch für ihn die "Relativierte" Churchsche These beanspruchen dürfen. - Wir wollen uns jedoch aus den in §7.1 erläuterten Gründen (vgl. S.136f.) von diesen gängigen Charakterisierungen entfernen, um den Begriff des relativen Algorithmus, sowie den der durch ihn bedingten Turingreduzierbarkeit rein syntaktisch mithilfe geeigneter rekursiv aufzählbarer Mengen zu präzisieren. Dazu gehen wir, wie angekündigt, um der Motivation willen mit Rogers (1967) von der Charakterisierung durch Orakelmaschinen aus und zeigen, wie diese - kraft ihrer Kodierung durch Diagramme - dazu führt.

Erstelle nämlich eine effektive Liste aller Orakelmaschinen und ordne vermöge dieser jeder Maschine einen Index zu. Sei P_z^1 die Orakelmaschine mit dem Index z . Dann entspricht jeder Orakelmaschine und einer beliebig gewählten Menge X eine partielle Funktion einer Variablen. Sei ψ_z^X - in Übereinstimmung mit unserer Notation in §7.1 - die partielle Funktion, die von P_z^1 relativ zur Menge X berechnet wird. Ist z fest, so läßt sich zu beliebig gegebenem Input x effektiv ein (möglicherweise unendliches) Diagramm erzeugen, welches - entsprechend variierendem X - alle möglichen Berechnungen von ψ_z^X beschreibt. Dies geschieht folgendermaßen. Beginne mit Input x die Rechnung, die durch P_z^1 bestimmt wird, und rechne so lange, bis die erste Frage der Gestalt "liegt n in X ?" gestellt wird. (Diese könnte z.B. "liegt 7 in X ?" lauten.) Starte dann an diesem Punkt zwei Rechnungen, von welchen die eine der positiven Antwort (" $7 \in X$ "), die andere der negativen (" $7 \notin X$ ") korrespondiert. Jeder der so entstehenden Äste verzweigt sich dann entsprechend den weiteren Fragen. Wird auf einem Ast eine Frage gestellt, die bereits früher auf ihm beantwortet wurde, so verwende diese Antwort, ohne erneut aufzuspalten. Die sich so verzweigende Rechnung bestimmt das gewünschte Diagramm, das im Umriß - nach Rogers' Illustration - etwa folgendergestalt erscheinen könnte:



Rogers betrachtet nun zwei Mengen D' und D'' , die jeweils von einem Ast des Diagramms bestimmt werden, nämlich

$D' = \{w \mid \text{auf dem Ast wird eine positive Antwort auf "w} \in X\text{" verwendet}\}$ und

$D'' = \{w \mid \text{auf dem Ast wird eine negative Antwort auf "w} \in X\text{" verwendet}\}.$

(So gilt etwa für den abbrechenden Ast des obigen Diagramms $D' = \{7, 11\}$ und $D'' = \emptyset$.) Immer ist dabei $D' \cap D'' = \emptyset$. Entscheidend ist die Feststellung, daß für jede Menge X mit $D' \subset X$ und $D'' \subset \bar{X}$ die Berechnung von $\psi_z^X(x)$ durch die Orakelmaschine mit der Rechnung entlang des betreffenden Astes übereinstimmt. Gewisse Äste des Diagramms können abbrechen (und somit einen Output liefern), andere brauchen es nicht. Im Fall eines abbrechenden Astes sind D' und D'' endlich.

Im Verlauf der Konstruktion des Diagramms läßt sich effektiv die folgende Menge erzeugen: $\{\langle y, u, v \rangle \mid \text{es gibt einen abbrechenden Ast, für welchen } D' = D_u \text{ und } D'' = D_v \text{ ist, und der als Output } y \text{ liefert}\}$; i.e. die Menge der kodier-

n Tripel, welche die im Diagramm für die Berechnung von $\psi_z^X(x)$ abbrechenden Äste insofern charakterisieren, als ihre ersten Komponenten die jeweiligen Outputs darstellen, während ihre zweiten und dritten aus den kanonischen Indizes der entsprechenden (endlichen!) Mengen D' und D'' bestehen. Die rekursive Aufzählbarkeit der Menge geht aus folgendem Verfahren hervor. Beginne mit der Berechnung von $\psi_z^X(x)$ und der Erstellung des dazugehörigen Diagramms. Spaltet dieses sich bei einer Frage " $w \in X?$ " auf, so führe die Rechnung in jedem der dabei entstehenden Äste simultan derart fort, daß beim n -ten Schritt des Verfahrens in jedem Ast des Diagramms n Rechenschritte ausgeführt sind. Da hierbei immer nur endlich viele Äste in Betracht zu ziehen sind, genügt immer auch eine endliche Zahl von Rechenschritten, weshalb das Verfahren effektiv bleibt. Bricht einer der so entstandenen Äste (nach endlich vielen Schritten) ab, dann lassen sich mit dem erscheinenden Output auch die kanonischen Indizes der korrespondierenden Mengen D' und D'' ermitteln. Das entsprechende Tripel wird, kodiert, in die Menge aufgenommen, für die wir so eine effektive Liste erhalten. - Was nun die Frage nach einem rekursiv aufzählbaren Index für sie betrifft, so hängt dieser offenbar sowohl vom Maschinenindex z , als auch vom Input x ab. Lassen wir aber auch den Input variabel, so gewinnen wir zu jedem Maschinenindex z effektiv einen rekursiv aufzählbaren Index für die Menge der kodierten Quadrupel, welche - für alle x - die im Diagramm für die Berechnung von $\psi_z^X(x)$ abbrechenden Äste insofern charakterisieren, als ihre ersten Komponenten den Input x , die zweiten den Output y , und die dritten und vierten die kanonischen Indizes der entsprechenden Mengen D' und D'' bilden. Das heißt, es gibt eine rekursive Funktion h derart, daß für alle z

$$h(z) = \{ \langle x, y, u, v \rangle \mid \text{im Diagramm für } P_z^1 \text{ mit Input } x \text{ gibt es einen abbrechenden Ast, für den } D' = D_u, D'' = D_v, \text{ und dessen Output } y \text{ ist} \}.$$

unmittelbar ist die rekursive Aufzählbarkeit von $W_{h(z)}$ anhand des folgenden Verfahrens einzusehen. Beginne mit der Berechnung von $\psi_z^X(0)$, rechne einen Schritt und erstelle das dazugehörige Diagramm. Dann beginne mit der Berechnung von $\psi_z^X(1)$, berechne einen weiteren Schritt von $\psi_z^X(0)$ und zwei Schritte von $\psi_z^X(1)$ und erstelle das neue, bzw. ergänze das alte soweit determinierte Diagramm. Dann sind im n -ten Schritt des Verfahrens in der Berechnung von $\psi_z^X(0)$, $\psi_z^X(1), \dots, \psi_z^X(n-1)$ jeweils n Schritte und die entsprechenden Diagramme ausgeführt. Sofern sich die Diagramme in verschiedene Äste spalten, sind beim n -ten Schritt des Verfahrens in jedem Ast eines jeden Diagramms n Rechenschritte bezeichnet. Wann immer nun irgendeiner der insgesamt dabei auftretenden Äste abbricht, kodiere das Quadrupel bestehend aus dem Input x , dem Output y und den kanonischen Indizes u und v der dazugehörigen endlichen Mengen D' und D'' , und übernehme es in die Menge $W_{h(z)}$. Nicht nur, daß wir durch dies Verfahren eine effektive Liste derselben gewinnen, - es wird an ihm auch gut an-

schaulich, wie der Index von $W_{h(z)}$ effektiv von z abhängt, d.h. daß der Wert $h(z)$ berechenbar ist.

Dieser Prozeß der Beschreibung der Orakelmaschinen durch die Mengen $W_{h(z)}$ ist es, der es - wie wir anhand von Rogers' Zitat in §7.1 andeuteten - "nahelegt, relative Algorithmen durch geeignete rekursiv aufzählbare Mengen zu charakterisieren" (vgl. S.138). Genauer gesagt, besteht das Ziel darin, für eine beliebig gegebene Menge X die relativ zu X partiell rekursive Funktion - als formale Präzisierung des Algorithmus relativ zu X - durch ihren Graphen zu definieren. Das geordnete Paar (x,y) soll genau dann im Graphen der zu definierenden partiell X -rekursiven Funktion φ_z^X liegen, wenn es Zahlen u und v gibt derart, daß diese die kanonischen Indizes der endlichen Mengen D' und D'' auf dem Ast - mit Output y - des Diagramms sind, welches die Berechnung von $\varphi_z^X(x)$ (durch P_z') beschreibt. Da diese Berechnung durch die Menge $W_{h(z)}$ kodiert wird, könnten wir definieren: " $(x,y) \in \varphi_z^X \iff \exists u,v [\langle x,y,u,v \rangle \in W_{h(z)} \ \& \ D_u \subset X \ \& \ D_v \subset \bar{X}]$ "; doch wäre damit, wie schon in §7.1 (S. 138) bemerkt, insofern noch keine rein syntaktische Definition von φ_z^X erreicht, als die $W_{h(z)}$ ja in unmittelbarer Abhängigkeit von den P_z' charakterisiert sind. Doch ist es, da die Eigenschaften der $W_{h(z)}$ abstrahiert werden sollen, und diese Mengen aus kodierten Quadrupeln bestehen, immerhin plausibel, wenn Rogers bei seinem Versuch sich ebenfalls auf solche bezieht. Welches sind nun die Bedingungen, die Quadrupel $\langle x,y,u,v \rangle$ erfüllen müssen, um als Elemente einer Menge in Frage zu kommen, die ein P_z' kodieren soll? Zuerst ist klar, daß in jedem Falle $D_u \cap D_v = \emptyset$ zu gelten hat, da bei der Berechnung von $\varphi_z^X(x)$ die Mengen D' und D'' , die durch D_u und D_v dargestellt werden, disjunkt sind (vgl. S.148). In diesem Fall nennt Rogers das Quadrupel **k o n s i s t e n t** ("consistent", im Original).- Betrachten wir nun zwei verschiedene Quadrupel $\langle x,y_1,u_1,v_1 \rangle$ und $\langle x,y_2,u_2,v_2 \rangle$ (mit gleicher erster Komponente) als Kodierungen zweier verschiedener Äste ein und desselben Diagramms, dann muß es in diesem einen Punkt geben, an dem die Äste sich voneinander abspalten - d.h. eine Zahl w derart, daß auf die Frage " $w \in X$?" der eine Ast mit der positiven, der andere mit der negativen Antwort fortsetzt. Somit liegt w entweder in $D_{u_1} \cap D_{v_2}$ oder in $D_{u_2} \cap D_{v_1}$, d.h. es muß gelten: $D_{u_1} \cap D_{v_2} \neq \emptyset$ oder $D_{u_2} \cap D_{v_1} \neq \emptyset$.² Um dies als Definitionsbedingung zu formulieren, nennt Rogers, der uns hierbei das Pferd etwas von hinten aufzuzäumen scheint, zuerst zwei beliebige $\langle x_1,y_1,u_1,v_1 \rangle, \langle x_2,y_2,u_2,v_2 \rangle$ **k o m p a t i b e l** ("compatible", im Original), wenn $D_{u_1} \cap D_{v_2} = D_{u_2} \cap D_{v_1} = \emptyset$, und fordert alsdann - in Übereinstimmung mit unserer direkteren Motivation -, daß zwei Quadrupel mit gleicher erster Komponente nicht kompatibel (bzw., wie wir auch sagen wollen, i n k o m p a t i b e l) sein sollen. Eine solche rekursiv aufzählbare Menge, deren Elemente, aufgefaßt als kodierte Quadrupel, beiden

Bedingungen genügen, heiße regulär ("regular", im Original). Wir re-
 limieren dies in der folgenden Definition (nach Rogers(1967), S.131f.).

- Definition:** (a) $\langle x, y, u, v \rangle$ heißt konsistent, wenn $D_u \cap D_v = \emptyset$.
 (b) $\langle x_1, y_1, u_1, v_1 \rangle, \langle x_2, y_2, u_2, v_2 \rangle$ heißen kompatibel, wenn $D_{u_1} \cap D_{v_2} = D_{u_2} \cap D_{v_1} = \emptyset$; sonst inkompatibel.
 (c) W_z heißt regulär, wenn
 (i) $\langle x, y, u, v \rangle \in W_z \Rightarrow \langle x, y, u, v \rangle$ konsistent;
 (ii) $\langle x, y_1, u_1, v_1 \rangle, \langle x, y_2, u_2, v_2 \rangle \in W_z$ & $\langle x, y_1, u_1, v_1 \rangle \neq \langle x, y_2, u_2, v_2 \rangle$
 $\Rightarrow \langle x, y_1, u_1, v_1 \rangle, \langle x, y_2, u_2, v_2 \rangle$ inkompatibel.

Nach dieser Definition ist, wie wir nun zeigen, jede der Mengen $W_h(z)$
 regulär. Sei dazu $\langle x, y, u, v \rangle \in W_{h(z)}$; d.h. im Diagramm für P'_z mit Input x gibt
 es einen abbrechenden Ast mit $D' = D_u$, $D'' = D_v$, und dem Output y . Da $D' \cap D'' =$
 $\emptyset$, gilt $D_u \cap D_v = \emptyset$, d.h. $\langle x, y, u, v \rangle$ ist per definitionem konsistent.- Seien
 nun, zum Nachweis von (ii) in (c) der Definition, $\langle x, y_1, u_1, v_1 \rangle$ und $\langle x, y_2, u_2, v_2 \rangle$
 in $W_h(z)$ mit $\langle x, y_1, u_1, v_1 \rangle \neq \langle x, y_2, u_2, v_2 \rangle$. Also gibt es im Diagramm für P'_z
 mit Input x zwei abbrechende Äste mit den Outputs y_1 bzw. y_2 , für welche $D' =$
 D_{u_1} und $D'' = D_{v_1}$, bzw. $D' = D_{u_2}$ und $D'' = D_{v_2}$. Da die Äste nach Vorausset-
 zung verschieden sind, müssen sie an einem bestimmten Punkt, etwa der Frage
 " $w \in X$?", divergieren, wobei die positive Antwort die Ablehnung des einen, die
 negative die des andern bedingt. Ist es der durch $\langle x, y_1, u_1, v_1 \rangle$ repräsentierte
 Ast, für den " $w \in X$ " - und folglich der durch $\langle x, y_2, u_2, v_2 \rangle$ dargestellte, für
 den " $w \notin X$ " -, so gilt nach Definition von D' und D'' , daß $w \in D_{u_1}$ und $w \in D_{v_2}$,
 also $D_{u_1} \cap D_{v_2} \neq \emptyset$. Ist es dagegen $\langle x, y_1, u_1, v_1 \rangle$, der die Antwort " $w \notin X$ " weiter-
 erfolgt, also $\langle x, y_2, u_2, v_2 \rangle$ " $w \in X$ ", so gilt $w \in D_{v_1}$ und $w \in D_{u_2}$, also $D_{u_2} \cap D_{v_1} \neq$
 $\emptyset$. Es gilt daher entweder $D_{u_1} \cap D_{v_2} \neq \emptyset$ oder $D_{u_2} \cap D_{v_1} \neq \emptyset$, wonach per de-
 finitionem $\langle x, y_1, u_1, v_1 \rangle$ und $\langle x, y_2, u_2, v_2 \rangle$ inkompatibel sind. Insgesamt ist da-
 mit nach (c) der Definition $W_h(z)$ regulär.

Um vermöge seiner regulären Mengen den Begriff des relativen Algorith-
 mus definieren zu können, zeigt Rogers als nächstes die Existenz der "Regula-
 risierungsfunktion" $\mathcal{P}$ mit der Eigenschaft, daß $W_{\mathcal{P}(z)}$ für alle z regulär ist,
 wobei $W_{\mathcal{P}(z)} = W_z$, wenn W_z bereits regulär ist.

Satz 1: Es gibt eine rekursive Funktion $\mathcal{P}$ derart, daß für alle z

- (i) $W_{\mathcal{P}(z)}$ regulär; und
 (ii) W_z regulär $\Rightarrow W_{\mathcal{P}(z)} = W_z$.

Beweis: Betrachte die entsprechend einem Korollar zum Hauptsatz über rekursiv
 aufzählbare Mengen existierende rekursive Funktion f' , für die gilt:
 $\text{range } \mathcal{G}_{f'(x)} = \text{domain } \mathcal{G}_x$, und: $\text{domain } \mathcal{G}_x \neq \emptyset \Rightarrow \mathcal{G}_{f'(x)}$ total (für alle x)
 (vgl. §1.4, S.26). Also listet $\mathcal{G}_{f'(z)}$ für beliebiges z die Menge W_z auf.
 Wir erhalten daraus eine Liste für $W_{\mathcal{P}(z)}$, indem wir alle nicht konsistenten
 kodierten Quadrupel $\langle x, y, u, v \rangle$, sowie alle mit einem bereits gelisteten

$\langle x, y, u, v \rangle$ kompatiblen $\langle x, y', u', v' \rangle$ streichen. Da wir auf diese Weise von W_z effektiv zum regulären $W_{\wp(z)}$ gelangen, ist (i) des Satzes bewiesen. War dabei die Menge W_z bereits regulär, so bleibt ihre Liste, die keine nicht konsistenten bzw. paarweise kompatiblen Elemente enthält, unverändert - was (ii) beweist.

Mit Hilfe von $\wp$ präzisiert nun Rogers - wie in (6) und (7) aus §7.1 - den Begriff des relativen Algorithmus vermöge der partiell X-rekursiven Funktion, sowie den der Turing-Reduzierbarkeit in Form von $\leq_T$ (a.a.O. S.132f. und S.137).

Definition: (i) $\wp_z^X := \{ \langle x, y \rangle \mid \exists u, v [\langle x, y, u, v \rangle \in W_{\wp(z)} \text{ \& } D_u \subset X \text{ \& } D_v \subset \bar{X}] \}$.
 $\wp_z^{(k)X} := \lambda x_1 \dots x_k [\wp_z^X(\langle x_1, \dots, x_k \rangle)]$.

(ii) Für eine feste Menge A heißt η eine partiell A-rekursive Funktion, wenn $\eta = \wp_z^A$ für ein $z \in \mathbb{N}$.

(iii) f heißt eine A-rekursive Funktion, wenn $f = \wp_z^A$ für ein z , und $\wp_z^A$ total ist.

(iv) A heißt rekursiv in B, wenn c_A eine B-rekursive Funktion ist.

(v) A heißt Turing-reduzierbar auf B (in Zeichen: $A \leq_T B$, was wir beibehalten, auch wenn wir später mit unseren Formalisierungen in Gestalt von $\leq_S$ oder $\leq_W$ rechnen werden), wenn A rekursiv in B ist.

(vi) $A \leq_T B$ via $z: \Leftrightarrow c_A = \wp_z^B$.

Zu dieser Definition einige Bemerkungen. Zunächst ist klar, daß - aufgrund der Regularität der $W_{\wp(z)}$ - die Relation $\wp_z^X$ für alle z und X eine (partielle) Funktion definiert. Seien nämlich $\langle x, y_1 \rangle, \langle x, y_2 \rangle \in \wp_z^X$; d.h. es gibt u_1, v_1, u_2, v_2 derart, daß $\langle x, y_1, u_1, v_1 \rangle, \langle x, y_2, u_2, v_2 \rangle \in W_{\wp(z)}$ mit $D_{u_1} \subset X$, $D_{u_2} \subset X$, $D_{v_1} \subset \bar{X}$ und $D_{v_2} \subset \bar{X}$. Angenommen, $\langle x, y_1, u_1, v_1 \rangle \neq \langle x, y_2, u_2, v_2 \rangle$; dann sind nach (ii) der Definition der regulären Menge $\langle x, y_1, u_1, v_1 \rangle$ und $\langle x, y_2, u_2, v_2 \rangle$ inkompatibel, d.h. es gilt entweder $D_{u_1} \cap D_{v_2} \neq \emptyset$ oder $D_{u_2} \cap D_{v_1} \neq \emptyset$. Da aber $D_{u_1} \subset X$ und $D_{v_2} \subset \bar{X}$, sowie $D_{u_2} \subset X$ und $D_{v_1} \subset \bar{X}$, ist dies ein Widerspruch. Also gilt $\langle x, y_1, u_1, v_1 \rangle = \langle x, y_2, u_2, v_2 \rangle$, woraus aufgrund der umkehrbaren Eindeutigkeit der Quadrupel-Kodierung insbesondere die Gleichheit von y_1 und y_2 folgt. Das aber bedeutet, daß $\wp_z^X$ als Relation rechtseindeutig, i.e. eine partielle Funktion ist. - Weiter ist die formale Definition der partiell A-rekursiven Funktion $\wp_z^A$ insofern als eine Präzisierung unseres intuitiven Begriffs des Algorithmus relativ zu A anzusehen, als zur Berechnung von $\wp_z^A(x)$ (für beliebiges x) Antworten auf Fragen der Gestalt "liegt w in A ?", die hier in den Bedingungen " $D_u \subset A$ " und " $D_v \subset \bar{A}$ " stecken, notwendig sind, wozu die Definitionsvorschrift für $\wp_z^A$ allein kein Mittel liefert. Ist aber A rekursiv, so wird die Berechnung effektiv, und damit $\wp_z^A$ zur partiell rekursiven Funktion. Dies formulieren wir mit Rogers als Satz.

Satz 2: A ist rekursiv $\Rightarrow \mathcal{G}_z^A$ ist eine partiell rekursive Funktion.

Beweis: Sei A rekursiv. Dann können wir $\mathcal{G}_z^A(x)$ wie folgt berechnen. Wir gehen die Aufzählung von $\mathcal{W}_{\mathcal{P}(z)}$ durch und prüfen für jedes erscheinende Element $\langle x', y', u', v' \rangle$, ob $x' = x$, $D_{u'} \subset A$ und $D_{v'} \subset \bar{A}$. Ist dies für ein - dann eindeutig bestimmtes - $\langle x', y', u', v' \rangle$ der Fall, brechen wir ab und liefern y' als Output. Da A rekursiv, ist dieses Verfahren effektiv und liefert, wenn $\mathcal{G}_z^A(x)$ definiert, diesen Wert als Output.

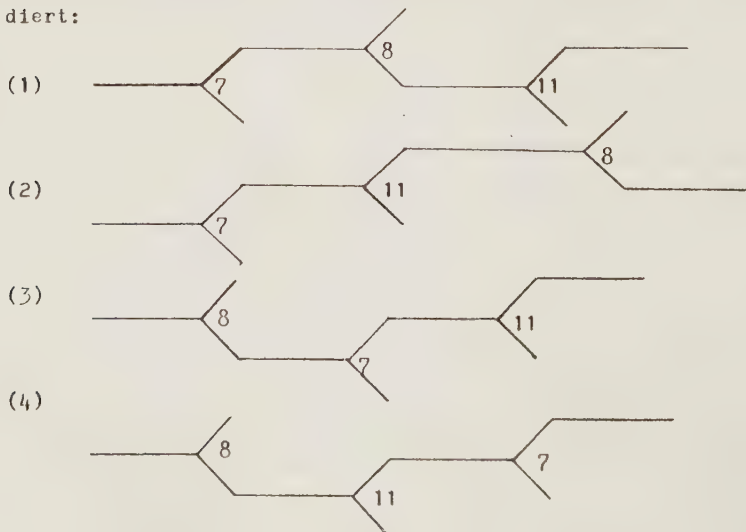
Auch Rogers' Definition von $\leq_T$ ist, wie in (9) aus §7.1 angekündigt, insofern als eine gültige Präzisierung des intuitiven Reduzierbarkeitsbegriffs aufzufassen, als im Fall von $A \leq_T B$ die Rekursivität von B die Rekursivität von A nach sich zieht (Reflexivität und Transitivität von $\leq_T$ zeigen wir später bequemer für $\leq_w$). Denn angenommen, $A \leq_T B$ via z , i.e. $c_A = \mathcal{G}_z^B$, und B rekursiv. Dann ist nach Satz 2 c_A partiell rekursiv und folglich, da total, rekursiv. Also A rekursiv. - Andererseits ist $\leq_T$ (vgl. (8) in §7.1) als Charakterisierung des Reduzierbarkeitsbegriffs mindestens so allgemein wie $\leq_0$ nach §7.1, Definition (2) (S.136).

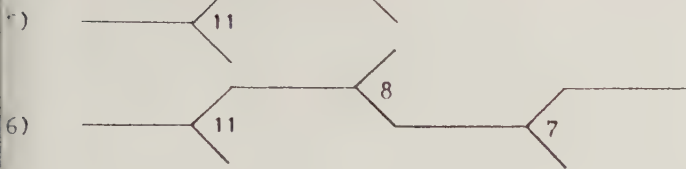
Satz 3: $A \leq_0 B \Rightarrow A \leq_T B$. Dieser Übergang ist effektiv, d.h. es gibt eine rekursive Funktion h derart, daß, wenn $A \leq_0 B$ via z , $A \leq_T B$ via $h(z)$ (für alle z).

Beweis: Gelte $A \leq_0 B$ via z , d.h. $c_A = \Psi_z^B$ mit Ψ_z^B nach §7.1, Definition (1). Wähle h wie auf S.149f. mit $\mathcal{W}_{h(z)} = \{ \langle x, y, u, v \rangle \mid \text{im Diagramm für } P_z^B \text{ mit Input } x \text{ gibt es einen abbrechenden Ast, für den } D' = D_u, D'' = D_v, \text{ und dessen Output } y \text{ ist} \} \}$. Dann gilt: $(x, y) \in \Psi_z^B \iff P_z^B$ mit Orakel bzgl. B liefert in Anwendung auf x den Output $y \iff$ es gibt u, v derart, daß im Diagramm für P_z^B mit Input x ein abbrechender Ast existiert, für den $D' = D_u, D'' = D_v$, und dessen Output y ist $\iff \exists u, v [\langle x, y, u, v \rangle \in \mathcal{W}_{h(z)} \ \& \ D_u \subset B \ \& \ D_v \subset \bar{B}] \iff \iff \exists u, v [\langle x, y, u, v \rangle \in \mathcal{W}_{f(h(z))} \ \& \ D_u \subset B \ \& \ D_v \subset \bar{B}] \iff (x, y) \in \mathcal{G}_{h(z)}^B$; also $\Psi_z^B = \mathcal{G}_{h(z)}^B$. Folglich $c_A = \mathcal{G}_{h(z)}^B$, d.h. $A \leq_T B$ via $h(z)$.

Da nun $\leq_T$ einerseits den intuitiven Reduzierbarkeitsbegriff zumindest formal gültig präzisiert, und andererseits nach Satz 3 mindestens so allgemein wie $\leq_0$ ist, muß, wie in §7.1 (S.139f.) expliziert, kraft der Relativierten These von Church die Äquivalenz der beiden Begriffe folgen. Auch der Übergang von $\leq_T$ zu $\leq_0$ ist effektiv; d.h. es gibt eine rekursive Funktion f derart, daß für alle z , wenn $A \leq_T B$ via z , $A \leq_0 B$ via $f(z)$: "If we choose to use a relativized Church's Thesis (with respect to oracle-machines), we have $(\exists \text{ recursive } f)(\forall z)(\forall X)[\Psi_{f(z)}^X = \mathcal{G}_z^X]$ (since $\mathcal{G}_z^X$ is evidently intuitively algorithmic relative to X (with instructions obtainable from z))" (Rogers o.a.O., S.132). "Of course", fügt Rogers als Fußnote hinzu, "with more detailed treatment, an explicit construction for f can be given" (ibid.). Dieser Verweis auf eine et-

was "ausführlichere Behandlung", womit eine "explizite Konstruktion" von f zu geben wäre, scheint in diesem Kontext insofern etwas befremdlich, als f sich trivialerweise sofort angeben ließe, wenn der - von Rogers ja behauptete - Satz von Blum (vgl. S.138f.) tatsächlich richtig - und damit dem Versuch einer rein syntaktischen Kodierung von Orakelmaschinen durch geeignete rekursiv aufzählbare Mengen in Gestalt der regulären Erfolg beschieden wäre. Effektiv wäre $f(z)$ für beliebiges z wie folgt zu definieren. Sei z gegeben. Dann ist $W_{\mathcal{P}(z)}$ regulär. Nach Voraussetzung gibt es dann ein z' derart, daß $W_{\mathcal{P}(z)} = W_{h(z')}$. Also kodiert $W_{\mathcal{P}(z)}$ das Diagramm einer Orakelmaschine, deren Index z' sich effektiv aus ihm ermitteln läßt. Definiere nun $f(z) \equiv z'$. Dann gilt für alle X und (x,y) : $(x,y) \in \mathcal{G}_z^X \iff \exists u,v [\langle x,y,u,v \rangle \in W_{\mathcal{P}(z)} \ \& \ D_u \subset X \ \& \ D_v \subset \bar{X}] \iff \exists u,v [\langle x,y,u,v \rangle \in W_{h(z')} \ \& \ D_u \subset X \ \& \ D_v \subset \bar{X}] \iff$ im Diagramm für $P_{z'}^1$, mit Input x gibt es einen abbrechenden Ast, für den $D^1 = D_u$, $D^{11} = D_v$, und dessen Output y ist $\iff P_{z'}^1$, mit Orakel bezüglich X liefert in Anwendung auf x den Output $y \iff (x,y) \in \Psi_{z'}^X$. D.h. $\Psi_{f(z)}^X = \mathcal{G}_z^X$. Mithin hätte f die gewünschte Eigenschaft.- Wenn sich nun f so einfach nicht erhalten läßt, so deshalb, weil der Satz von Blum in dieser Form nicht richtig ist (vgl. S.139). Seiner Intention nach gleichbedeutend mit der Behauptung, daß zu jeder regulären Menge $W_{\mathcal{P}(z)}$ sich ein Diagramm dergestalt konstruieren läßt, daß jedem ihrer Elemente $\langle x,y,u,v \rangle$ in diesem ein Ast mit Input x , Output y , $D^1 = D_u$ und $D^{11} = D_v$ entspricht, beruht sein Fehlschlagen auf Rogers Verkenennung der Tatsache, daß bei der Konstruktion der Diagramme nicht bloß die Zahlen als solche, für die das Orakel befragt wird, maßgeblich sind, sondern ebenso die Reihenfolge, in der dies geschieht. Indem bei der Kodierung der Äste diese nicht berücksichtigt wird, entsprechen jedem Element einer regulären Menge nicht nur ein einziger Ast, sondern deren mehrere. So werden etwa durch das - offenbar konsistente - Quadrupel $\langle 0,0,2^7+2^{11},2^8 \rangle$ die folgenden sechs Äste kodiert:





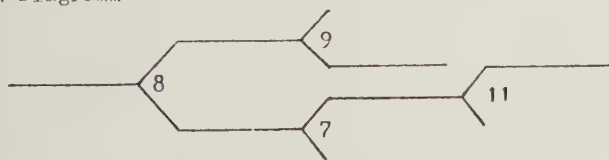
Nun wird durch die Bedingung der Inkompatibilität von je zwei Elementen (mit derselben ersten Komponente) der regulären Menge zwar sichergestellt, daß sich zu jedem von ihnen ein durch es kodierter Ast so finden läßt, daß die beiden Äste zu einem Diagramm zusammengefügt werden können, - nicht dagegen i. a., daß dies, wie es für die Gültigkeit des Satzes von Elum erforderlich wäre, für je zwei beliebige durch sie kodierte Äste möglich ist. Betrachten wir dazu neben $\langle 0, 0, 2^7 + 2^{11}, 2^8 \rangle$ zuzüglich das - offensichtlich mit ihm inkompatible und konsistente - Quadrupel $\langle 0, 0, 2^8, 2^9 \rangle$, so können wir z. B. - durch das erste kodierte Ast



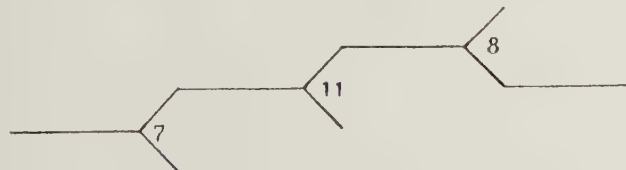
und den durch das zweite kodierte



zu dem Diagramm



zusammenstellen, - während es zu dem vom ersten kodierte Ast



keinen durch das zweite kodierte gibt, so daß beide in einem Diagramm liegen. Betrachtet man nämlich die erste Frage, welche in einem solchen an das Problem gestellt würde, so hätte diese einerseits " $7 \in X?$ ", andererseits aber entweder " $8 \in X?$ " oder " $9 \in X?$ " zu lauten - was nicht möglich ist.

Betrachten wir nun drei - konsistente und inkompatible - Quadrupel (mit gleicher erster Komponente), so können wir dem Vorherigen zufolge zwar zu je zweien von ihnen (durch sie kodierte) Äste finden, welche sich zu einem Diagramm zusammenfügen lassen; doch ist nicht gewährleistet, daß man zu allen dreien solche Äste findet. Dies gilt zum Beispiel für die drei Elemente der Menge $A = \{\langle 0, 0, 2^7 + 2^{11}, 2^8 \rangle, \langle 0, 0, 2^8, 2^9 \rangle, \langle 0, 0, 2^9, 2^7 \rangle\}$. Denn angenommen, es gäbe ein solches Diagramm, dann betrachte die erste der darin an das Orakel gestellten Fragen. Diese hätte zum einen entweder " $7 \in X?$ " oder " $11 \in X?$ " oder " $8 \in X?$ " zu lauten, da dies die auf jedem durch das erste Element kodierten Ast liegenden Fragen sind; zum andern - aufgrund des durch das zweite kodierten Astes - " $8 \in X?$ " oder " $9 \in X?$ "; und schließlich - angesichts des dritten - " $9 \in X?$ " oder " $7 \in X?$ ". Da aber keine dieser Fragen als Glied aller dreier Adjunktionen erscheint, ist dies nicht möglich. Wir resümieren unsere heuristischen Ausführungen in dem folgenden Satz.

Satz 4 (Gegenbeispiel zum Satz von Blum): Es existiert eine reguläre Menge A derart, daß es kein z gibt mit $A = W_h(z)$.

Beweis: Wähle die endliche - also insbesondere rekursiv aufzählbare - Menge $A = \{\langle 0, 0, 2^7 + 2^{11}, 2^8 \rangle, \langle 0, 0, 2^8, 2^9 \rangle, \langle 0, 0, 2^9, 2^7 \rangle\}$ aus unserer Illustration! Dann gilt: (i) Wegen $\{7, 11\} \cap \{8\} = \{8\} \cap \{9\} = \{9\} \cap \{7\} = \emptyset$ sind alle Elemente von A konsistent.

(ii) Je zwei verschiedene Elemente von A sind inkompatibel; denn:
für $\langle 0, 0, 2^7 + 2^{11}, 2^8 \rangle$ und $\langle 0, 0, 2^8, 2^9 \rangle$ ist $\{8\} \cap \{8\} = \{8\} \neq \emptyset$;
für $\langle 0, 0, 2^7 + 2^{11}, 2^8 \rangle$ und $\langle 0, 0, 2^9, 2^7 \rangle$ ist $\{7, 11\} \cap \{7\} = \{7\} \neq \emptyset$;
für $\langle 0, 0, 2^8, 2^9 \rangle$ und $\langle 0, 0, 2^9, 2^7 \rangle$ ist $\{9\} \cap \{9\} = \{9\} \neq \emptyset$.

Also ist A regulär.

Angenommen nun, es gibt ein z mit $A = W_h(z)$. Dann hat man zum Input 0 drei abbrechende Äste, wobei für den ersten $D' = \{7, 11\}$ und $D'' = \{8\}$ gilt, für den zweiten $D' = \{8\}$ und $D'' = \{9\}$, und für den dritten $D' = \{9\}$ und $D'' = \{7\}$. Die zur ersten Verzweigung des Diagramms gehörige Zahl muß nun im Durchschnitt der Vereinigungen der jeweiligen D' und D'' , i.e. in der Menge $(\{7, 11\} \cup \{8\}) \cap (\{8\} \cup \{9\}) \cap (\{9\} \cup \{7\}) = \{7, 8, 11\} \cap \{8, 9\} \cap \{7, 9\} = \emptyset$ liegen, was offenbar ein Widerspruch ist! Damit ist der Satz bewiesen.

Satz 4 zeigt, daß Rogers' Ziel, die Arbeitsweise der Orakelmaschinen rein syntaktisch durch rekursiv aufzählbare Mengen zu charakterisieren, durch seine Definition der regulären Mengen nicht realisiert ist. Wir können zu unserer Menge A kein Diagramm konstruieren, das die Arbeitsweise einer Orakelmaschine beschreiben würde. Infolgedessen läßt sich die Existenz der rekursiven Funktion f mit $\Psi_f^X(z) = \mathcal{P}_z^X$ nicht mehr so ohne weiteres demonstrieren, wie dies - unter der Voraussetzung der Gültigkeit des Satzes von Blum - zuvor geschah (S. 153f.). Wir haben daher, wofern wir $\leq_0$ unmittelbar aus $\leq_T$ folgern

wollen, gar keine andere Wahl, als dazu die - von Rogers herangezogene (vgl. b.) - Relativierte These von Church in Anspruch zu nehmen. Hier aber liegt die schon in §7.1 (S.140) angesprochene Problematik. Denn so schnell auch der (vermittels der Diagramme) formalisierte Reduzierbarkeitsbegriff $\leq_0$ aus seiner Formalisierung durch $\leq_T$ kraft der Relativierten Churchschen These zu folgern wäre, scheint doch umgekehrt deren Verwendbarkeit überhaupt erst dann akzeptabel, wenn diese Folgerung sich auch ohne ihre Zuhilfenahme nachweisen läßt. Indem es sich bei beiden Begriffen - so die zugrundeliegende intuitive Argumentation - um mathematisch exakt präzisierte formale Konzepte handelt, muß deren Äquivalenz, um irgend plausibel zu sein, sich auch rein formal beweisen lassen. Die Situation ist die gleiche wie im Fall der Präzisierung des intuitiven Begriffs von Berechenbarkeit: Nicht dadurch, daß man a priori die Churchsche These postulierte, wurde die Äquivalenz von dessen formalen Präzisierungen in Form der Turing-Berechenbarkeit, μ -Rekursivität und Rekursivität erkennbar (vgl. Hermes(1971)), sondern eben weil - nach dem grundlegenden Resultat der vierziger Jahre dieses Jahrhunderts (vgl. Einleitung, §.1) - all diese als formal äquivalent erwiesen wurden, schien die Annahme, daß der intuitive Begriff durch jede von ihnen voll erfaßt sei, - i.e. die Churchsche These - von unbestreitbarer Evidenz. Analog im Fall unserer zwei formalen Präzisierungen des intuitiven Reduzierbarkeitsbegriffs: Nicht kraft der von vornherein unterstellten Relativierten These von Church wollen wir, wie es Rogers nahelegt, die Äquivalenz von $\leq_T$ und $\leq_0$ erschließen, - vielmehr soll uns umgekehrt deren - als solcher zu leistende - formale Beweis im nachhinein als Argument dafür dienen, daß durch beide der intuitive Begriff von Reduzierbarkeit in seiner ganzen Allgemeinheit präzisiert wird. Wie sehr daher Rogers Verweis auf eine ausführliche Konstruktion von f - angesichts seiner Unterstellung des Blumschen Satzes - auf der einen Seite auch befremden mußte (vgl. S.153f.), umso zwangsläufiger scheint er nun - nach dessen Widerlegung - auf der anderen. Nichtsdestoweniger werden wir, da, wie in §7.1 angedeutet, die Definition der regulären Mengen nun nicht länger motiviert erscheint, die Existenz von f nicht direkt beweisen, sondern sie erst, nachdem wir (in §7.3) in Gestalt der "stark regulären" Mengen - nebst der durch sie induzierten Definition der relativen Rekursivität und der Turing-Reduzierbarkeit - Rogers' eigentliche Intention verwirklicht, und (in §7.4) das Verfahren so weit wie möglich verallgemeinert zu haben glauben, mittelbar aus der Implikation von $\leq_0$ (und $\leq_T$) durch $\leq_S$ deduzieren.-

§7.3 Modifikation und Berichtigung von Rogers' Verfahren: Präzisierung der Turing-Reduzierbarkeit als $\leq_B$ über stark reguläre Mengen

Es wäre nun kombinatorisch sicherlich kein Ding der Unmöglichkeit, in Rogers' Definition der regulären Menge die Bedingung der Inkompatibilität (für je zwei kodierte Quadrupel) dergestalt durch eine andere (doch allerdings für endlich viele!) zu ersetzen, daß damit seine eigentliche Absicht getroffen - und jede entsprechend der modifizierten Definition "reguläre" Menge wirklich die Arbeitsweise eines Orakelprogramms P'_Z beschreiben würde. Wir werden jedoch zugunsten einer gesteigerten Anschaulichkeit einen anderen Weg wählen, indem wir vermöge der Komponenten der zu betrachtenden Zahlentupel nicht mehr nur die Zahlen, für welche das Orakel befragt wird, als solche (in Form der Mengen D_u und D_v), sondern darüber hinaus auch die Reihenfolge, in der dies geschieht, mitkodieren. Betrachte dazu wie bisher das Orakelmaschinenprogramm P'_Z mit dem - auf eine gegebene Liste aller Maschinen bezogenen - Index z , wobei wir von nun an für beliebige Inputs x das Diagramm für $\Psi_z^x(x)$ mit " $D_{z,x}$ " bezeichnen wollen. Jeder mit einem Output y endende Ast von $D_{z,x}$ kann dann entweder durch eine Folge der Gestalt (x,y) (falls keine Frage gestellt wird), oder der Gestalt $(x,u_1,v_1,u_2,v_2,\dots,u_n,v_n,y)$ beschrieben werden, wobei die Frage der Reihe nach für $u_1,u_2,\dots,u_n$ gestellt wird, und $v_1 = 1$ bzw. $v_1 = 0$ gilt je nachdem, ob die positive oder die negative Antwort auf dem Ast verwendet wird ($1 \leq i \leq n$). Betrachten wir dabei nur die Folge der fraglichen Zahlen sowie der ihnen korrespondierenden, durch 0 und 1 kodierten Antworten, so gelangen wir zu dem Begriff der normalen Folge, auch kurz N-Folge genannt. Verträglich sollen N-Folgen heißen, welche Äste kodieren, die sich nach einem gemeinsamen Anfangsstück verzweigen. Formal werden diese Begriffe in der folgenden Definition präzisiert.

Definition: (i) Unter einer N-Folge verstehen wir die leere Folge $\emptyset$ oder eine Folge der Gestalt $((u_0,v_0),(u_1,v_1),\dots,(u_n,v_n)) \in (N^2)^{n+1}$ mit $n \geq 0, u_i \in N, v_i \in \{0,1\}$ und $u_i \neq u_j$ (für $0 \leq i,j \leq n, i \neq j$).

N-Folgen bezeichnen wir mit $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ (evtl. mit Indizes).

(ii) Zwei N-Folgen α_1, α_2 heißen verträglich, falls es ein $k \geq 0$ gibt derart, daß $\alpha_1 = ((u_0,v_0),(u_1,v_1),\dots,(u_k,v_k),(u_{k+1},v_{k+1}),\dots,(u_n,v_n))$ und $\alpha_2 = ((u_0,v_0),(u_1,v_1),\dots,(u_k,1-v_k),(u_{k+1}^1,v_{k+1}^1),\dots,(u_m^1,v_m^1))$ (mit $k \leq n,m$).

(iii) Eine Menge K von N-Folgen heißt verträglich, falls ihre Elemente paarweise verträglich sind.-

Betrachten wir zum Beispiel unser Diagramm auf S.148 (§7.2), so entspricht dessen abbrechenden Ast die N-Folge $((u_0,v_0),(u_1,v_1)) = ((7,1),(11,1))$.- Wir fassen im folgenden N-Folgen durchwegs als - zuerst

vermöge der zweistelligen τ , und sodann mittels einer beliebigen Kodierungsfunktion $\tau^*: \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathbb{N}^n \rightarrow \mathbb{N}$ (vgl. etwa Rogers (1967), S.71) - kodiert auf, doch wenn wir anstelle etwa der (typographisch) umständlicheren Schreibweise $\langle u_0, v_0 \rangle, \langle u_1, v_1 \rangle, \dots, \langle u_n, v_n \rangle$ unsere bisherige beibehalten wollen.

Als unmittelbares Analogon zu der in §7.2 (S.149) eingeführten Funktion h ermitteln wir nun die rekursive Funktion h' mit der Eigenschaft, daß für alle z

$$h'(z) = \{ \langle x, y, w \rangle \mid D_{z,x} \text{ enthält einen mit Output } y \text{ abbrechenden Ast, wobei } w \text{ entweder die leere Folge } \emptyset \text{ oder eine } N\text{-Folge } ((u_0, v_0), \dots, (u_n, v_n)) \text{ kodiert, je nachdem, ob der Ast keinerlei Fragen, oder die für } u_1 \text{ samt den entsprechenden Antworten } v_1 \text{ } (0 \leq i \leq n) \text{ verwendet} \}.$$

stark regulär sollen nun per definitionem Mengen sein, welche die Arbeitsweise eines Orakelmaschinenprogramms P'_z kodieren.

Definition: W_z heißt stark regulär, wenn

- (i) für alle $z = \langle x, y, w \rangle \in W_z$ gilt, daß w eine N -Folge kodiert;
- (ii) für alle $\langle x, y_1, w_1 \rangle$ und $\langle x, y_2, w_2 \rangle$ mit $\langle x, y_1, w_1 \rangle \neq \langle x, y_2, w_2 \rangle$ die durch w_1 und w_2 kodierten N -Folgen verträglich sind.

Analog der Regularität der $W_{h(z)}$ (vgl. S.151) folgt nun, daß für beliebiges z die Menge $W_{h'(z)}$ stark regulär ist; denn gemäß der Konstruktion der Diagramme $D_{z,x}$ haben je zwei verschiedene - mit Input x beginnende - abbrechende Äste einen letzten gemeinsamen Punkt u_k , an dem der eine mit der positiven Entscheidung (i.e. $v_k=1$), der andere mit der negativen ($v_k=0$) fortsetzt.- Im Unterschied zu unserem einschlägigen Resultat im Fall der regulären Mengen (vgl. §7.2, Satz 4) läßt sich nun aber auch die Umkehrung beweisen.

Satz 1 (korrigierte Fassung des Satzes von Blum): Zu jeder stark regulären Menge A gibt es ein z mit $A = W_{h'(z)}$.

Beweis: Sei A stark regulär. Wir beschreiben zuerst die Konstruktion des zu A und einem beliebigen x gehörigen Diagramms, in Zeichen: $D_{A,x}$, und zeigen sodann, wie zu $D_{A,x}$ ein Orakelprogramm P'_z aufgestellt werden kann, dem für den Input x das Diagramm $D_{z,x}$ (also $D_{z,x} = D_{A,x}$) entspricht.

- 1) Sei x gegeben. Zähle die (kodierten) Tripel $\langle x, y, w \rangle \in A$ auf. Da A stark regulär ist, gibt es entweder kein einziges Tripel dieser Gestalt, oder genau ein Tripel der Form $\langle x, y, 0 \rangle$ (da 0 die leere N -Folge $\emptyset$ kodiert, die nicht mit sich selbst verträglich ist), oder aber ein oder mehrere Tripel $\langle x, y, w \rangle$, wobei dann jeweils jede durch w kodierte N -Folge ungleich der leeren ist (da diese mit keiner N -Folge verträglich). Dekodiere bei jedem auftretenden Tripel die dritte Komponente (vermöge τ^{*-1}) und bilde die entsprechenden Zahlenfolgen x, y bzw. $x, u_0, v_0, u_1, v_1, \dots, u_n, v_n, y$. Die diesen Folgen entsprechenden Äste sind zum Diagramm $D_{A,x}$ zusammenzufügen.

Enthält A kein Tripel $\langle x, y, w \rangle$, so ist $D_{A,x}$ leer; enthält A (genau) ein Tripel der Form $\langle x, y, 0 \rangle$, so besteht $D_{A,x}$ nur aus dem Ast x, y ; im dritten Fall ergeben sich einer oder mehrere (möglicherweise unendlich viele) Äste $A_0, \dots, A_n, \dots$. Dann ist $D_{A,x}$ wie folgt in Stufen zu konstruieren:
 Stufe 0: $D_{A,x}^0$ besteht aus dem einen Ast A_0 .

Stufe 1: Suche den - der starken Regularität von A und folglich der Verträglichkeit der A_0 und A_1 entsprechenden N -Folgen wegen existierenden - Punkt, an dem $D_{A,x}^0$ und A_1 (nach ihrem gemeinsamen Anfangsstück) voneinander abweichen, und füge dort den Rest von A_1 an $D_{A,x}^0$ an.
 Das so entstehende Diagramm sei $D_{A,x}^1$.

Stufe $n+1$: Verfolge das gemeinsame Anfangsstück von $D_{A,x}^n$ und A_{n+1} bis zu dem Punkt, an welchem beide divergieren, und füge dort den Rest von A_{n+1} an $D_{A,x}^n$ an. (Die Existenz eines solchen Verzweigungspunktes ist der starken Regularität von A wegen stets garantiert.)
 Das so erweiterte Diagramm sei $D_{A,x}^{n+1}$.

(ii) Arbeitsweise von P'_Z mit Input x und Orakel für X .

Betrachte den - nach Konstruktion - ersten Ast A von $D_{A,x}$. Ist dieser gleich x, y , liefere y als Output. Ist er dagegen gleich $x, u_0, v_0, \dots, u_n, v_n, y$, so stelle fest, wie weit die Orakelentscheidungen für die Fragen "liegt u_1 in X ?" mit den Antworten v_1 übereinstimmen (für $0 \leq i \leq n$).
 Genauer: frage "liegt u_0 in X ?"; wenn ja, (bzw. nein), und $v_0 = 1$ (bzw. $= 0$), frage "liegt u_1 in X ?"... usw., bis entweder y erreicht wird - dann liefere Output y -, oder eine Frage "liegt u_j in X ?" erscheint, die das Orakel anders beantwortet als v_j ($0 \leq j \leq n$). Im letzteren Fall suche den ersten Ast A' von $D_{A,x}$, der mit A bis u_j übereinstimmt und dann abweicht. Existiert dieser, so hat er die Gestalt $x, u_1, v_1, \dots, u_j, 1-v_j, u'_{j+1}, v'_{j+1}, \dots, u'_r, v'_r, y'$ (mit $1 \leq i \leq n, r$). Verfahre für A' ab u'_{j+1} analog wie für A , d.h. frage "liegt u'_{j+1} in X ?"; wenn ja (bzw. nein), und $v'_{j+1} = 1$ (bzw. $= 0$), frage "liegt u'_{j+2} in X ?", usw...-

P'_Z berechnet für jedes gegebene X -Orakel eine partielle Funktion ψ_Z^X und hat für jeden Input x das Diagramm $D_{Z,x} = D_{A,x}$.
 Dann ist $W_{h^1}(z) = A$.
 Q.e.d.

Wie Satz 1 - zusammen mit der vorangehenden Bemerkung - zeigt, werden wir (in Bestätigung unserer Behauptung in §7.1, S.141) Rogers' ursprünglicher Absicht, die er anhand der regulären Mengen verfehlte, in Gestalt der stark regulären gerecht: die Arbeitsweise der Orakelmaschinen rein syntaktisch durch geeignete rekursiv aufzählbare Mengen zu charakterisieren. Ist jedoch die korrigierte Fassung des Satzes von Blum gleichbedeutend mit der Aussage, daß wir zu jeder stark regulären Menge A eine Orakelmaschine P'_z so angeben können, daß - für beliebiges x - die durch die Elemente von A mit x als erster Komponente kodierten Äste sich zu dem die Berechnung von Ψ_z^X beschreibenden Diagramm zusammenfügen. Dies ermöglicht uns - und zwar ohne die Inanspruchnahme der Relativierten These von Church - sofort die Definition einer rekursiven Funktion f' , welche der Funktion f in §7.3 entspricht, deren Konstruktion sich dort - aufgrund der Falschheit des Satzes von Blum - nicht ohne weiteres durchführen ließ (vgl. S.153f.). - Vorweg aber die zu §7.2, S.152, analogen Definitionen. Dazu benötigen wir als erstes eine der Funktion ρ entsprechende starke Regularisierungs-Funktion ρ' .

Satz 2: Es gibt eine rekursive Funktion ρ' derart, daß für alle z gilt:

(i) $W_{\rho'(z)}$ stark regulär;

(ii) W_z stark regulär $\implies W_{\rho'(z)} = W_z$.

Beweis: Wie von Satz 1, §7.2, da die Bedingungen (i) und (ii) in der Definition der stark regulären Menge ebenso entscheidbar sind wie jene in der der regulären: Wir erhalten aus der Liste von W_z (für beliebiges z) dadurch eine für $W_{\rho'(z)}$, daß wir jedes kodierte Tripel $\langle x, y, w \rangle$, dessen dritte Komponente nachweislich keine N -Folge kodiert, weglassen lassen, und desgleichen jedes $\langle x, y, w \rangle$, wenn die durch w kodierte N -Folge mit der durch w' eines bereits gelisteten $\langle x, y', w' \rangle$ kodierten nicht verträglich ist.

Ferner verwenden wir zwei - offenbar existente - rekursive Funktionen g' und g'' derart, daß für $w = 0$

$$D_{g'(w)} = D_{g''(w)} = \emptyset,$$

und für w als der Kodierung der N -Folge $((u_0, v_0), \dots, (u_n, v_n))$

$$D_{g'(w)} = \{u_j \mid v_j = 1\} \quad \text{und} \quad D_{g''(w)} = \{u_j \mid v_j = 0\} \quad (\text{für } 0 \leq j \leq n)$$

gilt. Vermöge dieser Hilfsfunktionen verläuft nun die - in §7.1, (10) und (11) antizipierte - Präzisierung des Begriffs des relativen Algorithmus durch Φ_z^X , sowie des der Turing-Reduzierbarkeit durch $\leq_B$ in analoger Weise über die stark regulären Mengen, wie die durch φ_z^X bzw. $\leq_T$ über die regulären.

Definition: (i) $\Phi_z^X(x) \approx y \iff \exists w [\langle x, y, w \rangle \in W_{\rho'(z)} \ \& \ D_{g'(w)} \subset X \ \& \ D_{g''(w)} \subset \bar{X}]$.

(ii) $A \leq_R B \iff \exists z [c_A = \Phi_z^R];$
dann: $A \leq_B B$ via z .

Da hierbei nur die formalen Begriffe anders - jedoch, wie sich zeigen

wird, äquivalenterweise - definiert sind, während ihr intuitiver Gehalt identisch blieb, können wir die terminologischen Bezeichnungen - der partiell A-rekursiven Funktion (für Φ_Z^A), der A-rekursiven Funktion (wenn Φ_Z^A total), der relativen Rekursivität und der Turing-Reduzierbarkeit (für $\leq_B$) - nach der entsprechenden Definition in §7.2 (S.152) unverändert für sie übernehmen.

Wie im Fall von φ_Z^X ist auch - hier vermöge der starken Regularität von $\mathcal{W}^{\rho'}(z)$ - für die Relation Φ_Z^X (für bel. X, x) die Rechtseindeutigkeit gewahrt. Denn angenommen, $(x, y), (x, y') \in \Phi_Z^X$ mit $y \neq y'$. Das heißt, es gibt w und w' derart, daß $\langle x, y, w \rangle, \langle x, y', w' \rangle \in \mathcal{W}^{\rho'}(z)$ mit $D_{g'(w)}, D_{g'(w')} \subset X$ und $D_{g''(w)}, D_{g''(w')} \subset \bar{X}$. Wegen Bedingung (ii) in der Definition der stark regulären Menge gibt es dann $k, m, n \in \mathbb{N}$ mit $0 \leq k \leq m, n$, so daß w die N -Folge α und w' die N -Folge α' kodiert, wobei

$\alpha = ((u_0, v_0), \dots, (u_k, v_k), (u_{k+1}, v_{k+1}), \dots, (u_m, v_m))$ und

$\alpha' = ((u_0, v_0), \dots, (u_k, v_k'), (u_{k+1}, v_{k+1}'), \dots, (u_n, v_n'))$ mit $v_k' = 1 - v_k$.

Gilt $v_k = 1$, also $v_k' = 0$, d.h. $u_k \in D_{g'(w)}$ und $u_k \in D_{g''(w')}$, so folgt $u_k \in X$ und $u_k \in \bar{X}$ - Widerspruch! Analog folgt für $v_k = 0$, also $v_k' = 1$, daß $u_k \in D_{g''(w')}$ und $u_k \in D_{g'(w)}$, also $u_k \in \bar{X}$ und $u_k \in X$ - Widerspruch. - Wie φ_Z^A , so ist auch Φ_Z^A insofern eine Präzisierung des "Algorithmus relativ zu A", als zur Berechnung von $\Phi_Z^A(x)$ (für beliebiges x) - hier in den Bedingungen " $D_{g'(w)} \subset A$ " und " $D_{g''(w)} \subset \bar{A}$ " enthaltene - Beantwortungen von Fragen bzgl. der Elementschafft von A nötig sind, wofür die bloße Definitionsbedingung für Φ_Z^A keinerlei Mittel liefert. Erst durch die Rekursivität von A wird die Entscheidung effektiv, und Φ_Z^A partiell rekursiv.

Satz 3: A rekursiv $\implies \Phi_Z^A$ partiell rekursiv.

Beweis: Analog §7.2, Satz 2. Unter der Voraussetzung der Rekursivität von A durchlaufen wir - für beliebiges x - die Aufzählung von $\mathcal{W}^{\rho'}(z)$ und prüfen für jedes $\langle x', y', w' \rangle$, ob $x' = x$, $D_{g'(w')} \subset A$ und $D_{g''(w')} \subset \bar{A}$. Erscheint so ein - eindeutig bestimmtes - $\langle x', y', w' \rangle$, brechen wir mit y' als Output ab. So wird der Wert $\Phi_Z^A(x)$, falls definiert, effektiv ermittelt.

Schließlich stellt auch $\leq_B$ insofern eine gültige Präzisierung des intuitiven Begriffs von Reduzierbarkeit dar, als im Fall von $A \leq_B B$ die Rekursivität von B auch A rekursiv werden läßt (wobei wir den Nachweis der Reflexivität und Transitivität von $\leq_B$, wie schon im Fall von $\leq_T$, auf den später definierten äquivalenten Begriff $\leq_w$ reduzieren). Denn unter der Annahme, daß $A \leq_B B$ via z , also $c_A = \Phi_Z^B$, und B rekursiv, ist nach Satz 3 Φ_Z^B partiell rekursiv, und folglich c_A rekursiv. - Indirekt erhellt Letzteres auch aus dem folgenden Satz, der mehr oder weniger als Folgerung aus Satz 1 erscheint.

Satz 4: Für alle A, B gilt: $A \leq_0 B \iff A \leq_B B$; und diese wechselseitige Implikation ist effektiv, d.h. es gibt rekursive Funktionen h' und f' derart, daß wenn $A \leq_0 B$ via z , $A \leq_B B$ via $h'(z)$, und $A \leq_B B$ via z , $A \leq_0 B$ via $f'(z)$ (für alle z).

Beweis: " $\implies$ ": Analog dem Beweis von Satz 3, §7.2; doch wollen wir ihn um der veränderten Terminologie willen ausführen.

Gelte $A \leq_0 B$ via z , d.h. $c_A = \psi_z^B$. Wähle h' wie auf S.159 mit $W_{h'(z)} = \{ \langle x, y, w \rangle \mid D_{z,x} \text{ enthält einen mit Output } y \text{ abbrechenden Ast, wobei } w \text{ die } N\text{-Folge der auf dem Ast an das Orakel gestellten Fragen samt den entsprechenden Antworten kodiert} \}$. Dann gilt: $(x, y) \in \psi_z^B \iff P'_z \text{ mit Orakel bezüglich } B \text{ liefert in Anwendung auf } x \text{ den Output } y \iff \text{es gibt ein } w \text{ derart, daß } D_{z,x} \text{ einen mit } y \text{ abbrechenden Ast enthält (für den } w \text{ die Fragen an das Orakel samt den Antworten kodiert), wobei } D' = D_{E'(w)} \text{ und } D'' = D_{E''(w)} \iff \exists w [\langle x, y, w \rangle \in W_{h'(z)} \text{ \& } D_{E'(w)} \subset B \text{ \& } D_{E''(w)} \subset \bar{B}] \iff \exists w [\langle x, y, w \rangle \in W_{P'(h'(z))} \text{ \& } D_{E'(w)} \subset B \text{ \& } D_{E''(w)} \subset \bar{B}] \iff (x, y) \in \Phi_{h'(z)}^B$. Also $\psi_z^B = \Phi_{h'(z)}^B$. Folglich $c_A = \Phi_{h'(z)}^B$, und damit $A \leq_B B$ via $h'(z)$.

" $\impliedby$ ": Analog unserer Demonstration für f in §7.2 (S.153f.), da wir für $\leq_B$ den "Satz von Flum" bewiesen haben:

Sei $A \leq_B B$ via z , d.h. $c_A = \Phi_z^B$. Definiere $f'(z)$ für beliebiges z wie folgt. Nach Satz 1 findet man effektiv den Index z' einer Orakelmaschine mit $W_{P'(z)} = W_{h'(z')}$ (da $W_{P'(z)}$ stark regulär). Dann gilt für $f'(z) := z'$ (für alle (x, y)): $(x, y) \in \Phi_z^B \iff \exists w [\langle x, y, w \rangle \in W_{P'(z)} \text{ \& } D_{E'(w)} \subset B \text{ \& } D_{E''(w)} \subset \bar{B}] \iff \exists w [\langle x, y, w \rangle \in W_{h'(z')}$ \& $D_{E'(w)} \subset B \text{ \& } D_{E''(w)} \subset \bar{B}] \iff D_{z',x}$ enthält einen mit Output y abbrechenden Ast (für den w die Orakelfragen samt den Antworten kodiert) mit $D' = D_{E'(w)} \subset B$ und $D'' = D_{E''(w)} \subset \bar{B} \iff P'_z \text{ mit Orakel bzgl. } B \text{ liefert in Anwendung auf } x \text{ den Output } y \iff (x, y) \in \psi_z^B \iff (x, y) \in \psi_{f'(z)}^B$. Also $c_A = \Phi_z^B = \psi_{f'(z)}^B$; i.e. $A \leq_0 B$ via $f'(z)$. Q.e.d.

§7.4 Verallgemeinerung von $\leq_T$: Präzisierung der Turing-Reduzierbarkeit als $\leq_S$ und $\leq_W$ über schwach reguläre bzw. beliebige rekursiv aufzählbare Mengen

Wie in §7.1 vorweggenommen, ist die Frage, ob durch die Ersetzung der regulären Mengen in (7) (S.139) durch beliebige rekursiv aufzählbare der Reduzierbarkeitsbegriff noch gültig zu präzisieren sei, positiv zu beantworten. Dies führte in (12) (S.142) zu der folgenden Definition.

Definition: $A \leq_W B \iff$
 $\iff \exists z \forall x, y \left[(x, y) \in c_A \iff \exists u, v \left[\langle x, y, u, v \rangle \in W_z \text{ \& } D_u \subset B \text{ \& } D_v \subset \bar{B} \right] \right]$
 $\iff \exists z \left[c_A = \{ (x, y) \mid \exists u, v \left[\langle x, y, u, v \rangle \in W_z \text{ \& } D_u \subset B \text{ \& } D_v \subset \bar{B} \right] \} \right]$
 Dann: $A \leq_W B$ via z .

Wie im Fall von $\leq_T$ und $\leq_B$ ist, wenn $A \leq_W B$, A intuitiv auf B reduzierbar (vgl. (14), §7.1). Gelte etwa $A \leq_W B$ via z , mit rekursivem B . Um für beliebiges x zu entscheiden, ob $x \in A$ oder nicht, durchlaufe eine beliebige Aufzählung von W_z , bis ein (kodiertes) Quadrupel mit x als erster Komponente erscheint. Da c_A total, gibt es ein $y \in \{0, 1\}$ mit $(x, y) \in c_A$, und folglich nach Voraussetzung ein u, v derart, daß $\langle x, y, u, v \rangle \in W_z$ (wobei $D_u \subset B$ und $D_v \subset \bar{B}$). Ist $y = 1$ (bzw. $= 0$), so gilt $x \in A$ (bzw. $x \notin A$). Also A rekursiv.- Demzufolge ist die Relation $\leq_W$, sofern sie sich auch noch als reflexiv und transitiv erweist, als gültige Präzisierung des intuitiven Reduzierbarkeitsbegriffs akzeptabel. Daß dies der Fall ist, zeigen wir nachträglich in §7.6 .-

Somit ergibt sich, daß es zum Zweck einer rein syntaktischen Definition von Reduzierbarkeit möglich ist, auf beliebige rekursiv aufzählbare Mengen zurückzugreifen. Da diese keiner weiteren Bedingung (wie etwa vordem der Regularität oder starken Regularität) mehr zu genügen brauchen, ist klar, daß wir in $\leq_W$ die all geme in st e und p e r s e n a t ü r l i c h - s t e Charakterisierung der Turing - R e d u z i e r - b a r k e i t durch rekursiv aufzählbare Mengen gefunden haben. Trivialerweise gilt (13) aus §7.1 .

Satz 1: $A \leq_T B \implies A \leq_W B$. Dieser Übergang ist effektiv.

Beweis: Sei $A \leq_T B$ via z , d.h. $c_A = \wp_z^B = \{ (x, y) \mid \exists u, v \left[\langle x, y, u, v \rangle \in W_{\wp(z)} \text{ \& } D_u \subset B \text{ \& } D_v \subset \bar{B} \right] \}$.

Dann gilt: $(x, y) \in c_A \iff \exists u, v \left[\langle x, y, u, v \rangle \in W_{\wp(z)} \text{ \& } D_u \subset B \text{ \& } D_v \subset \bar{B} \right]$;

also $A \leq_W B$ via $\wp(z)$.- Aufgrund der Rekursivität von $\wp$ (§7.2, Satz 1) ist dieser Übergang effektiv.

Da " $A \leq_0 B \implies A \leq_T B$ " nach §7.3, Satz 3, folgt mit Satz 1 " $A \leq_0 B \implies A \leq_W B$ ", wobei die Effektivität des Übergangs sich aus der Rekursivität der Funktion $\wp \circ h$ (als der Komposition zweier rekursiver Funktionen) ergibt; für $A \leq_0 B$ via z folgt $A \leq_W B$ via $\wp(h(z))$.- Die Umkehrung wäre nun direkt dadurch zu zeigen, daß wir zu einer beliebigen rekursiv aufzählbaren Menge W_z

eine stark reguläre Menge $\mathbb{W}_Z^X(z')$ so angeben, daß wenn $A \leq_W B$ via z , $A \leq_B B$ via z' . Obwohl nun dieser Nachweis relativ kompliziert erscheint, ist doch - wie in §7.1 (S.143) dargelegt - nicht dies der eigentliche Grund für unser andersartiges Vorgehen, sondern die Wahrnehmung, daß der Rückgriff auf beliebige rekursiv aufzählbare Mengen zwar zur Präzisierung des Reduzierbarkeitsbegriffs, nicht hingegen - wie der folgende Satz zeigt - zu der der in X partiell rekursiven Funktion genügt. Dazu rekapitulieren wir vorweg Definition (15) von §7.1.

Definition: $\zeta_Z^X := \{(x,y) \mid \exists u,v [\langle x,y,u,v \rangle \in \mathbb{W}_Z \text{ \& } D_u \subset X \text{ \& } D_v \subset \bar{X}]\}$.

Satz 2: Die Relation ζ_Z^X ist im allgemeinen keine (partielle) Funktion.

Beweis: Sei $\mathbb{W}_Z := \{\langle 0,0,0,0 \rangle, \langle 0,1,0,0 \rangle\}$ (mit geeignetem z), X beliebig.

Dann ist $\zeta_Z^X = \{(0,0), (0,1)\}$ (da $\emptyset \subset X$ und $\emptyset \subset \bar{X}$) und folglich als Relation nicht rechtseindeutig.

Wir könnten nun dem in Satz 2 festgestellten Manko dadurch begegnen, daß wir - in einer bedingten Definition - die Relation ζ_Z^X dann als die in X partiell rekursive Funktion begriffen, wenn immer sie rechtseindeutig ist; doch wollen wir dies seiner Unentscheidbarkeit wegen umgehen. Die Frage, auf die wir demnach verwiesen sind, lautet: Welche Eigenschaft muß die rekursiv aufzählbare Menge $\mathbb{W}_Z$ haben, um - für beliebiges X - die Rechtseindeutigkeit von ζ_Z^X zu garantieren? Der Nachweis der Rechtseindeutigkeit von ζ_Z^X bzw. Φ_Z^X erwies die Inkompatibilität zweier Quadrupel (mit gleicher erster Komponente) als eine dafür hinreichende Bedingung. Dabei genügt es, wie der nächste Satz zeigt, sich auf die Verschiedenheit der zweiten Komponenten zu beziehen.

Satz 3: Für alle z gilt: $\forall X [\zeta_Z^X \text{ ist eine (partielle) Funktion}] \Leftrightarrow \Leftrightarrow \forall x \forall y \forall u \forall v \forall u' \forall v' [\langle x,y,u,v \rangle, \langle x,y',u',v' \rangle \in \mathbb{W}_Z \text{ konsistent \& } y \neq y' \Rightarrow (D_u \cap D_{v'}) \cup (D_{u'} \cap D_v) \neq \emptyset]$.

Beweis: Sei z gegeben.

" $\Rightarrow$ ": Sei $\zeta_Z^X = \{(x,y) \mid \exists u,v [\langle x,y,u,v \rangle \in \mathbb{W}_Z \text{ \& } D_u \subset X \text{ \& } D_v \subset \bar{X}]\}$. Seien $\langle x,y,u,v \rangle, \langle x,y',u',v' \rangle \in \mathbb{W}_Z$ konsistent mit $y \neq y'$. Indirekt. Angenommen, $(D_u \cap D_{v'}) \cup (D_{u'} \cap D_v) = \emptyset$, d.h. $D_u \cap D_{v'} = D_{u'} \cap D_v = \emptyset$. Dann folgt zusammen mit der Konsistenzbedingung $(D_u \cup D_{u'}) \cap (D_v \cup D_{v'}) = \emptyset$. Definiere $X := D_u \cup D_{u'}$. Dann gilt wegen $D_v \cup D_{v'} \subset \bar{X}$, daß $(x,y), (x,y') \in \zeta_Z^X$ - im Widerspruch zur Voraussetzung. Also $(D_u \cap D_{v'}) \cup (D_{u'} \cap D_v) \neq \emptyset$.

" $\Leftarrow$ ": Sei X beliebig. Gelte $(x,y), (x,y') \in \zeta_Z^X$ mit u,v,u',v' derart, daß $\langle x,y,u,v \rangle, \langle x,y',u',v' \rangle \in \mathbb{W}_Z$ mit $D_u \subset X$, $D_v \subset \bar{X}$, $D_{u'} \subset X$, $D_{v'} \subset \bar{X}$. Angenommen, $y \neq y'$. Dann wäre nach Voraussetzung $D_u \cap D_{v'} \neq \emptyset$ oder $D_{u'} \cap D_v \neq \emptyset$ - im Widerspruch zu $D_u \subset X$ und $D_{v'} \subset \bar{X}$, bzw. $D_{u'} \subset X$ und $D_v \subset \bar{X}$! Q.e.d.

Als Verallgemeinerung der Definition in §7.2 (S.151) erhalten wir durch

Satz 3 die folgende Definition.

Definition: W_z heißt schwach regulär, wenn gilt:

$$\begin{aligned} &\langle x, y_1, u_1, v_1 \rangle, \langle x, y_2, u_2, v_2 \rangle \in W_z \text{ konsistent \& } y_1 \neq y_2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow (D_{u_1} \cap D_{v_2}) \cup (D_{u_2} \cap D_{v_1}) \neq \emptyset \text{ (d.h. } \langle x, y_1, u_1, v_1 \rangle, \langle x, y_2, u_2, v_2 \rangle \\ &\text{inkompatibel)}. \end{aligned}$$

Satz 4: $A \text{ regulär} \Rightarrow A \text{ schwach regulär.}$

(Die Umkehrung ist i.a. falsch.)

Beweis: Sei $A = W_z$ regulär mit $\langle x, y_1, u_1, v_1 \rangle, \langle x, y_2, u_2, v_2 \rangle \in W_z$, wobei $y_1 \neq y_2$.
Dann gilt $\langle x, y_1, u_1, v_1 \rangle \neq \langle x, y_2, u_2, v_2 \rangle$, und somit sind $\langle x, y_1, u_1, v_1 \rangle$ und $\langle x, y_2, u_2, v_2 \rangle$ nach (ii) der Definition der regulären Menge inkompatibel.
Folglich A schwach regulär. - Daß die Umkehrung des Satzes i.a. nicht gilt, ist allein schon aufgrund der fehlenden Konsistenzbedingung in der Definition der schwach regulären Menge evident.

Durch die schwach regulären Mengen wird nun die Präzisierung der in X partiell rekursiven Funktion in Form von $\mathcal{J}_z^X$, sowie der Turing-Reduzierbarkeit als $\leq_B$ auf analoge Weise induziert wie die durch $\mathcal{G}_z^X$ und $\leq_T$ (bzw. Φ_z^X und $\leq_B$) durch die regulären (bzw. stark regulären). Dazu benötigen wir eine zu $\mathcal{G}$ und $\mathcal{G}'$ analoge schwache Regularisierungsfunktion $\mathcal{G}$.

Satz 5: Es gibt eine rekursive Funktion $\mathcal{G}$ derart, daß für alle z gilt:

(i) $W_{\mathcal{G}(z)}$ ist schwach regulär;

(ii) $W_z \text{ schwach regulär} \Rightarrow W_{\mathcal{G}(z)} = W_z$.

Beweis: Wir erhalten aus der Liste eines beliebigen W_z eine Liste für $W_{\mathcal{G}(z)}$, indem wir jedes $\langle x, y_2, u_2, v_2 \rangle$ wegfällen lassen, das mit einem bereits aufgetretenen $\langle x, y_1, u_1, v_1 \rangle$ mit $y_1 \neq y_2$ nicht inkompatibel ist.

Definition: (i) $\mathcal{J}_z^X(x) = y \Leftrightarrow \exists u, v [\langle x, y, u, v \rangle \in W_{\mathcal{G}(z)} \text{ \& } D_u \subset X \text{ \& } D_v \subset \bar{X}]$.

(ii) $A \leq_B B \Leftrightarrow \exists z [c_A = \mathcal{J}_z^B]; \text{ dann: } A \leq_B B \text{ via } z.$

(Vgl. (17) und (18) in §7.1, S.144).

Da diese neu definierten Begriffe sich mit den entsprechenden früheren als äquivalent erweisen werden (§7.5), dürfen wir auch für sie - wie bereits für Φ_z^X und $\leq_B$ in §7.3 (vgl. S.161f.) - bedenkenlos die Bezeichnungen der partiell A -rekursiven Funktion usw., sowie der Turing-Reduzierbarkeit übernehmen. - Analog $\mathcal{G}_z^X$ und Φ_z^X ist $\mathcal{J}_z^X$ eine (partielle) Funktion (Satz 3 mit $\mathcal{J}_z^X$ anstatt $\mathcal{G}_z^X$!), zu deren Berechnung die bloße Definitionsbedingung noch keinerlei Handhabe liefert. Erst durch die Rekursivität von X werden für beliebiges $\langle x, y, u, v \rangle \in W_{\mathcal{G}(z)}$ die Bedingungen " $D_u \subset X$ " und " $D_v \subset \bar{X}$ " entscheidbar.

Satz 6: $A \text{ rekursiv} \Rightarrow \mathcal{J}_z^A$ partiell rekursiv.

Beweis: Analog §7.2, Satz 2 (S.153).

Schließlich ist $\leq_S$ aufgrund der gleichen Argumente als Präzisierung des intuitiven Reduzierbarkeitsbegriffs anzusehen wie $\leq_T$, $\leq_B$ und $\leq_W$. - Wie in §7.1 (19) aus §7.1 angedeutet, fügt $\leq_S$ sich zwischen $\leq_T$ und $\leq_W$.

Satz 7: $A \leq_T B \implies A \leq_S B \implies A \leq_W B$ - wobei jede der Implikationen effektiv verläuft.

Beweis: Für $A \leq_T B$ via z , d.h. $c_A = g_z^B = \{(x,y) \mid \exists u,v [\langle x,y,u,v \rangle \in W_{f(z)} \text{ \& } D_u \subset B \text{ \& } D_v \subset \bar{B}] \}$, also, da $W_{f(z)} = W_{g(f(z))}$ (Satz 4), $c_A = g_{f(z)}^B$, ist $A \leq_S B$ via $f(z)$; und für $A \leq_S B$ via z , d.h. $c_A = g_z^B = \{(x,y) \mid \exists u,v [\langle x,y,u,v \rangle \in W_{g(z)} \text{ \& } D_u \subset B \text{ \& } D_v \subset \bar{B}] \}$, ist, da $W_{g(z)}$ jedenfalls rekursiv aufzählbar, $c_A = \zeta_z^B$, i.e. $A \leq_W B$ via $g(z)$. Dabei bedingt die Rekursivität von f und g die Effektivität der Übergänge. (Setze also auf S.145 oben $f := f$ und $g := g$.) - Effektiv folgt für $A \leq_T B$ via z $A \leq_W B$ via $g(f(z))$, da $g \circ f$ ebenfalls rekursiv.

Die Äquivalenz aller behandelten formalen Präzisierungen der Turing-Reduzierbarkeit folgt nun aus der Implikation " $A \leq_W B \implies A \leq_O B$ ". Dazu zeigen wir (vgl. §7.1 (S.145)) in §7.5 " $A \leq_S B \implies A \leq_B B$ ", und sodann in §7.6 " $A \leq_W B \implies A \leq_S B$ ". -

§7.5 Äquivalenz von $\leq_B$ und $\leq_S$

Nach §7.3, Satz 3, §7.3, Satz 4 und §7.4, Satz 7 gilt " $A \leq_B B \Rightarrow A \leq_S B$ " für alle A, B , wobei aufgrund der Effektivität der Sätze auch diese Implikation effektiv besteht. Unmittelbar ist sie wie folgt einzusehen. Gelte $A \leq_B B$ via z ; d.h. $c_A = \Phi_z^B = \{(x, y) \mid \exists w [\langle x, y, w \rangle \in W_{\rho'(z)} & D_{g'(w)} \subset B \text{ \& } D_{g''(w)} \subset \bar{B}]\}$. Definiere $C := \{(x, y, u, v) \mid \exists w [\langle x, y, w \rangle \in W_{\rho'(z)} \text{ \& } D_{g'(w)} = D_u \text{ \& } D_{g''(w)} = D_v]\}$. Man geht also eine beliebige Aufzählung von $W_{\rho'(z)}$ durch, ermittelt für jedes $\langle x, y, w \rangle$ die kanonischen Indizes der - endlichen - Mengen $D_{g'(w)}$ und $D_{g''(w)}$ und nimmt dann das Quadrupel $\langle x, y, u, v \rangle$ in C auf; daher ist C rekursiv aufzählbar. Wir zeigen, daß C schwach regulär ist. Angenommen, $\langle x, y, u, v \rangle, \langle x, y', u', v' \rangle \in C$ mit $y \neq y'$. Seien dazu w, w' derart, daß $\langle x, y, w \rangle, \langle x, y', w' \rangle \in W_{\rho'(z)}$ (also $D_{g'(w)} = D_u, D_{g''(w)} = D_v, D_{g'(w')} = D_{u'}$ und $D_{g''(w')} = D_{v'}$). Da $\langle x, y, w \rangle \neq \langle x, y', w' \rangle$, sind - aufgrund der starken Regularität von $W_{\rho'(z)}$ - die durch w und w' kodierten N -Folgen verträglich; d.h. es gilt $D_{g'(w)} \cap D_{g''(w')} \neq \emptyset$ oder $D_{g''(w)} \cap D_{g'(w')} \neq \emptyset$, also $D_u \cap D_{v'} \neq \emptyset$ oder $D_v \cap D_{u'} \neq \emptyset$. Also $\langle x, y, u, v \rangle, \langle x, y', u', v' \rangle$ inkompatibel; d.h. C schwach regulär. - Sei $C = W_{z'} = W_{\zeta(z')}$ für ein geeignetes z' . Definiere den Funktionswert $k'(z) := z'$. Dann gilt für alle (x, y) : $(x, y) \in \Phi_z^B \Leftrightarrow \Leftrightarrow \exists w [\langle x, y, w \rangle \in W_{\rho'(z)} \text{ \& } D_{g'(w)} \subset B \text{ \& } D_{g''(w)} \subset \bar{B}] \Leftrightarrow \exists u, v [\langle x, y, u, v \rangle \in C \text{ \& } D_u = D_{g'(w)} \subset B \text{ \& } D_v = D_{g''(w)} \subset \bar{B}] \Leftrightarrow \exists u, v [\langle x, y, u, v \rangle \in W_{\zeta(z')} \text{ \& } D_u \subset B \text{ \& } D_v \subset \bar{B}] \Leftrightarrow (x, y) \in \mathcal{V}_{k'(z)}^B$; also $\Phi_z^B = \mathcal{V}_{k'(z)}^B$, und damit nach Voraussetzung $c_A = \mathcal{V}_{k'(z)}^B$. Das heißt $A \leq_S B$ via $k'(z)$. Dabei ist die Effektivität dieses Übergangs aus der Rekursivität der Funktion k' ersichtlich. -

Umgekehrt zeigen wir zum Beweis der Implikation " $A \leq_S B \Rightarrow A \leq_B B$ " die Existenz einer rekursiven Funktion k derart, daß für alle z gilt:
(i) $W_{k(z)}$ ist stark regulär; und (ii) $\Phi_{k(z)}^X = \mathcal{V}_{z}^X$ für alle X . Denn dann folgt: $A \leq_S B$ via $z \Rightarrow c_A = \mathcal{V}_z^B \Rightarrow c_A = \Phi_{k(z)}^B \Rightarrow A \leq_B B$ via $k(z)$. - Hierzu geben wir zu jeder schwach regulären Menge W_z eine stark reguläre Menge $W_{z'}$, an mit $\Phi_{z'}^X = \mathcal{V}_z^X$ und definieren dann wieder argumentweise $k(z) := z'$. Aufgrund der besonderen Gestalt der stark regulären Mengen (vgl. §7.3, Definitionen S.158f.) benötigen wir dazu eine Reihe weiterer Definitionen und Charakterisierungen in bezug auf N -Folgen. Im folgenden unterscheiden wir nicht mehr, wie bisher, terminologisch zwischen der Bezeichnung " α " einer N -Folge und ihrer Kodierung " w ", sondern wollen unter " α " selbst bereits die Kodierung von α verstehen.

Definition: (i) Zwei N -Folgen α_1, α_2 heißen kombinierbar, falls

$$D_{g'}(\alpha_1) \cap D_{g''}(\alpha_2) = D_{g'}(\alpha_1) \cap D_{g''}(\alpha_2) = \emptyset.$$

Sind α_1, α_2 kombinierbar, so bezeichne $\alpha_1 + \alpha_2$ die N -Folge, welche entsteht, wenn man α_2 an α_1 anfügt, nachdem man zuvor in α_2 alle die Glieder gestrichen hat, die bereits in α_1

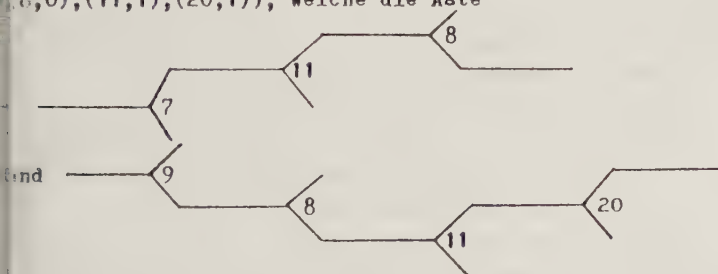
auftreten.

ii) Eine N-Folge α realisiert das (kodierte) Paar $\langle u, v \rangle$, falls $D_{g'(\alpha)} = D_u$ und $D_{g''(\alpha)} = D_v$; α standard-realisiert $\langle u, v \rangle$, falls $\alpha \langle u, v \rangle$ realisiert, und $\alpha = ((u_0, 1), \dots, (u_n, 1), (u'_0, 0), \dots, (u'_m, 0))$ mit $u_0 < \dots < u_n$ und $u'_0 < \dots < u'_m$ ($n, m \geq 0$); α erfüllt $\langle u, v \rangle$, falls $D_{g'(\alpha)} \subset D_u$ und $D_{g''(\alpha)} \subset D_v$.

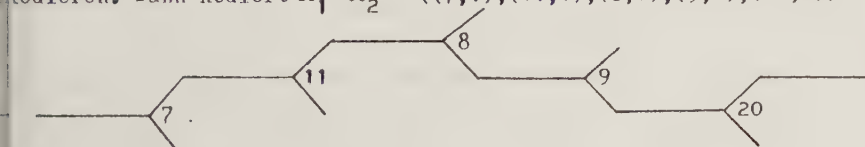
Offenbar gilt: $D_u \cap D_v = \emptyset \implies$ es gibt N-Folgen α , die $\langle u, v \rangle$ realisieren, und genau ein α_0 , welches $\langle u, v \rangle$ standard-realisiert (und umgekehrt).

Wenn für $D_u = \{u_0, \dots, u_n\}$ und $D_v = \{u'_0, \dots, u'_m\}$ mit $D_u \cap D_v = \emptyset$, also $u_i \neq u'_j$ ($0 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq m$) und $u_0 < \dots < u_n$, sowie $u'_0 < \dots < u'_m$ realisieren alle N-Folgen, deren Glieder aus Vertauschung von $(u_0, 1), \dots, (u_n, 1), (u'_0, 0), \dots, (u'_m, 0)$ entstehen, das Paar $\langle u, v \rangle$, während nur $\alpha_0 = ((u_0, 1), \dots, (u_n, 1), (u'_0, 0), \dots, (u'_m, 0))$ $\langle u, v \rangle$ standard-realisiert.

Fassen wir - wie bisher, und ihrer eigentlichen Motivation entsprechend - N-Folgen als Kodierungen von Ästen (möglicher Diagramme $D_{z, x}$) auf, so sind α_1 und α_2 genau dann kombinierbar, wenn es keine Zahl w gibt derart, daß die Frage "liegt w in X ?" auf dem durch α_1 kodierten Ast anders beantwortet wird als auf dem durch α_2 kodierten. Betrachten wir als Beispiel kombinierbarer N-Folgen $\alpha_1 = ((7, 1), (11, 1), (8, 0))$ und $\alpha_2 = ((9, 0), (8, 0), (11, 1), (20, 1))$, welche die Äste



kodieren. Dann kodiert $\alpha_1 + \alpha_2 = ((7, 1), (11, 1), (8, 0), (9, 0), (20, 1))$ den Ast



Das Paar $\langle 2^7 + 2^{11}, 2^8 \rangle$ wird von den sechs N-Folgen $((7, 1), (8, 0), (11, 1))$, $((7, 1), (11, 1), (8, 0))$, $((8, 0), (7, 1), (11, 1))$, $((8, 0), (11, 1), (7, 1))$, $((11, 1), (7, 1), (8, 0))$ und $((11, 1), (8, 0), (7, 1))$ realisiert, doch nur von $((7, 1), (11, 1), (8, 0))$ standard-realisiert. Erfüllt hingegen wird $\langle 2^7 + 2^{11}, 2^8 \rangle$ außer von diesen noch von $\emptyset$, $((7, 1))$, $((8, 0))$, $((11, 1))$, $((7, 1), (8, 0))$, $((7, 1), (11, 1))$, $((8, 0), (7, 1))$, $((8, 0), (11, 1))$, $((11, 1), (7, 1))$ und $((11, 1), (8, 0))$.

Definition: Sei $K \neq \emptyset$ eine endliche Menge von N-Folgen. Eine N-Folge $\alpha = ((u_0, v_0), \dots, (u_n, v_n))$ ($n \geq 0$) heißt K-relevant, falls es

(i) ein $\beta \in K$ gibt derart, daß $((u_0, v_0), \dots, (u_n, 1-v_n))$ ein "Anfangsstück" von β ist; d.h. falls

$\beta = ((u_0, v_0), \dots, (u_n, 1-v_n), (u_{n+1}, v_{n+1}), \dots, (u_m, v_m))$ mit $m \geq n$; und

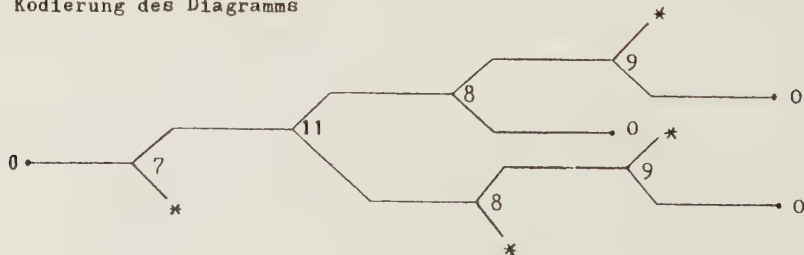
(ii) kein β in K gibt derart, daß α ein Anfangsstück von β ist; d.h. kein β mit $\beta = ((u_0, v_0), \dots, (u_n, v_n), (u_{n+1}, v_{n+1}), \dots, (u_m, v_m))$ mit $m \geq n$.

Ist $K = \emptyset$, so sei $\emptyset$ die einzige K-relevante Folge.

Lemma 1: Zu gegebenem endlichen K sind die (endlich vielen) K-relevanten Folgen effektiv angebbar.

Beweis: Erstelle zu jedem $\beta \in K$, $\beta = ((u_0, v_0), \dots, (u_n, v_n))$, effektiv die Anfangsstücke β , $((u_0, v_0), \dots, (u_{n-1}, v_{n-1}))$, $\dots$, $((u_0, v_0))$, $\emptyset$ und ersetze dann in diesen jedes letzte v_i ($0 \leq i \leq n$) durch die Zahl $1-v_i$. Jede dieser so entstehenden neuen N-Folgen ist dann daraufhin zu untersuchen, ob sie Anfangsstück einer von β verschiedenen N-Folge $\beta' \in K$ ist. Ist dies nicht der Fall, so ist sie K-relevant; andernfalls nicht. Da K nach Voraussetzung nur endlich viele Elemente enthält, ist diese Prozedur für jedes $\beta \in K$ effektiv durchführbar.

Als Beispiel betrachte $K = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\} := \{((7,1), (11,1), (8,0)), ((8,1), (9,0)), ((9,1), (7,0))\}$. Dann sind die Anfangsstücke von α_1 : $((7,1), (11,1), (8,0))$, $((7,1), (11,1))$, $((7,1))$, $\emptyset$; von α_2 : $((8,1), (9,0))$, $((8,1))$, $\emptyset$; und von α_3 : $((9,1), (7,0))$, $((9,1))$, $\emptyset$. Die entsprechend modifizierten N-Folgen lauten also: $((7,1), (11,1), (8,1))$, $((7,1), (11,0))$, $((7,0))$, $\emptyset$; $((8,1), (9,1))$, $((8,0))$, $\emptyset$; $((9,1), (7,1))$, $((9,0))$, $\emptyset$ - und von diesen sind mit Ausnahme der leeren N-Folge $\emptyset$ offenbar alle K-relevant. - Doch ist die Eigenschaft der K-Relevanz eigentlich motiviert im Hinblick auf Mengen K , deren Elemente als Kodierungen der Äste von Diagrammen $D_{Z,x}$ (erstellt für endlich viele Rechenschritte) aufzufassen sind. In diesem Fall ist K - im Sinne der Definition von §7.3 (S.158) - verträglich. Die K-relevanten N-Folgen kodieren dann genau die offenen Äste der Diagramme. Sei etwa $K = \{((7,1), (11,1), (8,1), (9,0)), ((7,1), (11,1), (8,0)), ((7,1), (11,0), (8,1), (9,0))\}$ - als Kodierung des Diagramms



Dann lauten die Anfangsstücke der Elemente von K : $((7,1),(11,1),(8,1),(9,0)),$
 $((7,1),(11,1),(8,1)), ((7,1),(11,1)), ((7,1)), \emptyset; ((7,1),(11,1),(8,0)),$
 $((7,1),(11,1)), ((8,0)), \emptyset; ((7,1),(11,0),(8,1),(9,0)), ((7,1),(11,0),(8,1)),$
 $((7,1),(11,0)), ((7,1)), \emptyset$; also entsprechend modifiziert:
 $((7,1),(11,1),(8,1),(9,1)), ((7,1),(11,1),(8,0)), ((7,1),(11,0)), ((7,0)), \emptyset;$
 $((7,1),(11,1),(8,1)), ((7,1),(11,0)), ((7,0)), \emptyset; ((7,1),(11,0),(8,1),(9,1)),$
 $((7,1),(11,0),(8,0)), ((7,1),(11,1)), ((7,0)), \emptyset$. Folglich ergeben sich als
 K -relevant: $((7,1),(11,1),(8,1),(9,1)), ((7,0)), ((7,1),(11,0),(8,1),(9,1)),$
 $((7,1),(11,0),(8,0))$ - und damit die Kodierungen genau der vier offenen
 Äste (*) des Diagramms.- Das folgende Lemma betrifft die Möglichkeit der Er-
 weiterung von Diagrammen durch Fortsetzung solcher offener Äste.

Lemma 2: Ist K verträglich, sind β, β' K -relevant, und β, α bzw. β', α kombi-
 nierbar, so ist (i) $\beta + \alpha$ mit jedem $\gamma \in K$ verträglich; und
 (ii) $\beta + \alpha$ mit $\beta' + \alpha$ verträglich, falls $\beta \neq \beta'$.

Beweis: Sei K verträglich.

i) Sei β K -relevant, und seien β, α kombinierbar. Sei $\gamma \in K$ beliebig. Wir zei-
 gen zuerst, daß β und γ verträglich sind.

Gelte $\beta = ((u_0, v_0), \dots, (u_n, v_n))$. Dann gibt es ein $\beta' \in K$ mit

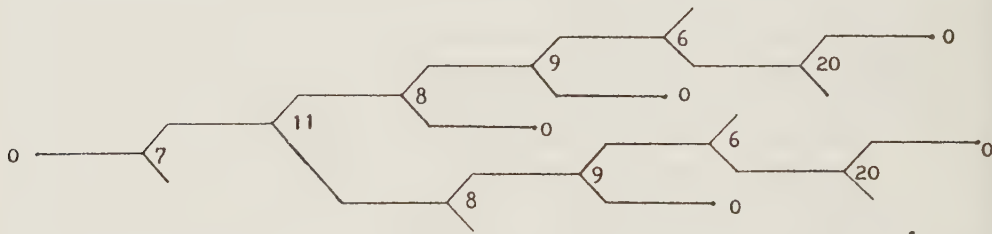
$$\beta' = ((u_0, v_0), \dots, (u_n, 1-v_n), (u_{n+1}, v_{n+1}), \dots, (u_m, v_m)) \quad (m \geq n).$$

Da β' und γ verträglich, gibt es ein $k \geq 0$, so daß das Glied (u_k, v_k) in β'
 auftritt, und $\gamma = ((u_0, v_0), \dots, (u_k, 1-v_k), (u'_{k+1}, v'_{k+1}), \dots, (u'_1, v'_1))$ ($1 \geq k$).
 Dabei muß, da β nach Voraussetzung kein Anfangsstück eines Elementes von
 K ist, $k \neq n$ gelten. Ist $k > n$, so weichen β und γ an derselben Stelle
 voneinander ab wie β und β' , i.e. bei u_n , während sie bis dahin übere-
 einstimmen; gilt dagegen $k < n$, so weichen β und γ an derselben Stelle
 voneinander ab wie β' und γ , während sie bis dahin übereinstimmen. Also
 sind β und γ in jedem Fall miteinander verträglich.-

Sei nun $\alpha = ((a_0, b_0), \dots, (a_p, b_p))$ und $\beta + \alpha = ((u_0, v_0), \dots, (u_n, v_n), (a'_0, b'_0),$
 $(a'_1, b'_1), \dots, (a'_q, b'_q))$. Dann gilt $\beta + \alpha = ((u_0, v_0), \dots, (u_r, v_r), (u_{r+1}, v_{r+1}), \dots,$
 $\dots, (u_n, v_n), (a'_0, b'_0), \dots, (a'_q, b'_q))$ und $\gamma = ((u_0, v_0), \dots, (u_r, 1-v_r), (u'_{r+1},$
 $v'_{r+1}), \dots, (u'_1, v'_1))$ mit $r \leq n$; also $\beta + \alpha$ mit γ verträglich.

(ii) Seien β, β' K -relevant und α, β bzw. α, β' kombinierbar, $\beta \neq \beta'$. Gelte $\beta =$
 $((u_0, v_0), \dots, (u_n, v_n))$ und $\beta' = ((u'_0, v'_0), \dots, (u'_m, v'_m))$. Dann gibt es β_1
 und β_2 aus K derart, daß $\beta_1 = ((u_0, v_0), \dots, (u_n, 1-v_n), (u_{n+1}, v_{n+1}), \dots,$
 $\dots, (u_p, v_p))$ und $\beta_2 = ((u'_0, v'_0), \dots, (u'_m, 1-v'_m), (u'_{m+1}, v'_{m+1}), \dots, (u'_q, v'_q))$.
 Wegen $\beta \neq \beta'$ gibt es ein kleinstes $k \leq \min\{n, m\}$ mit $(u_k, v_k) \neq (u'_k, v'_k)$.
 Also ist $((u_0, v_0), \dots, (u_k, 1-v_k))$ ein Anfangsstück von β_1 und $((u_0, v_0), \dots,$
 $\dots, (u_{k-1}, v_{k-1}), (u'_k, 1-v'_k))$ ein Anfangsstück von β_2 . Da K verträglich,
 also entweder $\beta_1 = \beta_2$ oder β_1, β_2 verträglich, folgt hieraus aber $u_k =$
 $= u'_k$ (also $v_k \neq v'_k$), und damit die Verträglichkeit von β und β' . Q.e.d.

Betrachten wir zum Beispiel die - verträgliche - Menge $K = \{((7,1),(11,1),(8,1),(9,0)), ((7,1),(11,1),(8,0)), ((7,1),(11,0),(8,1),(9,0))\}$ (vgl. S.170u.), so ist etwa die N-Folge $\alpha = ((7,1),(9,1),(6,0),(8,1),(20,1))$ mit den den obersten und mittleren offenen Ast des dazugehörigen Diagramms (ib.) kodierenden K-relevanten N-Folgen $\beta = ((7,1),(11,1),(8,1),(9,1))$ und $\beta' = ((7,1),(11,0),(8,1),(9,1))$ kombinierbar - nicht hingegen mit den die beiden unteren Äste kodierenden K-relevanten N-Folgen $((7,0))$ und $((7,1),(11,0),(8,0))$. Es gilt: $\beta + \alpha = ((7,1),(11,1),(8,1),(9,1),(6,0),(20,1))$ und $\beta' + \alpha = ((7,1),(11,0),(8,1),(9,1),(6,0),(20,1))$, wobei $\beta + \alpha$ bzw. $\beta' + \alpha$ offenbar nicht nur mit jedem $\gamma \in K$, sondern auch untereinander verträglich (mit dem Verzweigungspunkt $u_k = 11$). Das mit dem Rest der durch die Kombinationen $\beta + \alpha$ bzw. $\beta' + \alpha$ kodierten Äste fortgesetzte Diagramm ist dann



Verallgemeinern wir dieses Verfahren für beliebige K und α , d.h. kombinieren wir jede K-relevante und mit α kombinierbare N-Folge mit α , so erhalten wir die α -Komponente von K .

Definition: Sei K eine endliche verträgliche Menge von N-Folgen, α eine beliebige N-Folge. Dann heißt die Menge

$$K^\alpha = \{\beta + \alpha \mid \beta \text{ K-relevant \& } \beta, \alpha \text{ kombinierbar}\}$$

die α -Komponente von K .

In diesem Fall ist K^α endlich und effektiv angebbar. Denn nach Lemma 1 lassen sich die - endlich vielen - K-relevanten Folgen effektiv ermitteln. Für jede dieser N-Folgen β ist effektiv zu entscheiden, ob sie mit α kombinierbar ist. Ist dies der Fall, wird $\beta + \alpha$ in K^α gezählt. - In Einklang mit unserem obigen Beispiel besagt das folgende Lemma, daß sich die durch die Elemente von K kodierten Äste mit den durch die von K^α kodierten wieder zu einem (i.a. erweiterten) Diagramm zusammenfügen lassen.

Lemma 3: Ist K eine endliche verträgliche Menge von N-Folgen, und α eine beliebige N-Folge, so ist $K \cup K^\alpha$ verträglich.

Beweis: Seien $\beta, \beta' \in K \cup K^\alpha$. Dann gilt entweder (i) $\beta, \beta' \in K$; oder (ii) $\beta \in K, \beta' \in K^\alpha$ (o.B.d.A.); oder (iii) $\beta, \beta' \in K^\alpha$. Im ersten Fall sind β, β' verträglich-

ch, da K verträglich. - Im zweiten Fall gibt es ein K-relevantes β'' derart, daß $\beta' = \beta'' + \alpha$. Die Behauptung gilt folglich nach Lemma 2 (i). - Im dritten Fall gibt es K-relevante β_1, β_2 derart, daß $\beta = \beta_1 + \alpha$ und $\beta' = \beta_2 + \alpha$. Dann folgt die Behauptung nach Lemma 2 (ii). --

Nach diesen Prolegomena Über N-Folgen gelangen wir nun zum wesentlichen Satz dieses Paragraphen. Dabei werden wir nach der Angabe der grundlegenden Konstruktion den Beweis unterbrechen, um ihn erst nach Einschaltung weiterer Definitionen und Lemmata zu Ende zu führen.

Satz: Es gibt eine rekursive Funktion k derart, daß für alle z:

(i) $W_{k(z)}$ ist stark regulär;

(ii) $\Phi_{k(z)}^X = \bigcup_z^X$ für alle X.

Beweis: Wir definieren k argumentweise für beliebiges z. Sei also z gegeben.

Es ist zu zeigen, wie sich aus z ein Aufzählungsverfahren für eine stark reguläre Menge W_z , gewinnen läßt, so daß $\Phi_z^X = \bigcup_z^X$ für alle X. (Dann nämlich definiere $k(z) := z'$.)

Das Aufzählungsverfahren für W_z , verläuft wie folgt.

Aus z ist effektiv eine Aufzählung von $W_{\sigma(z)}$ zu gewinnen.

Sei $\{\langle x_n, y_n, u_n, v_n \rangle \mid n \in \mathbb{N}\}$ (mit N als einem Anfangsstück von $\mathbb{N}$) eine Aufzählung von $W_{\sigma(z)}$ ohne Wiederholungen, bei der alle inkonsistenten Glieder weggelassen werden. Da die Bedingung der Inkonsistenz für jedes (kodierte) Quadrupel $\langle x, y, u, v \rangle \in W_{\sigma(z)}$ entscheidbar ist, läßt eine solche Aufzählung sich effektiv aus der vorliegenden ermitteln.

Sei W_z^n , der - endliche - Teil von W_z , welcher bis zur Stufe n aufgezählt ist.

Stufe 0: Sei α die N-Folge, die $\langle u_0, v_0 \rangle$ standard-realisiert.

Da nach Voraussetzung alle Elemente von $\{\langle x_n, y_n, u_n, v_n \rangle \mid n \in \mathbb{N}\}$ konsistent sind, also insbesondere $D_{u_0} \cap D_{v_0} = \emptyset$ gilt, ist die Existenz von α gesichert.

Zähle $\langle x_0, y_0, \alpha \rangle$ in W_z^0 .

Stufe n+1: Sei α die N-Folge, die $\langle u_{n+1}, v_{n+1} \rangle$ standard-realisiert (existiert wie oben). Sei $K := \{\beta \mid \exists y [\langle x_{n+1}, y, \beta \rangle \in W_z^n]\}$ und K^α die α -Komponente von K.

Dann zähle alle $\langle x_{n+1}, y_{n+1}, \gamma \rangle$ in W_z^{n+1} mit $\gamma \in K^\alpha$. -

Es gilt: (1) W_z^n ist endlich (für alle n) (nach Lemma 3).
 (2) $K_{x,n} := \{\beta \mid \exists y [\langle x, y, \beta \rangle \in W_z^n]\}$ ist verträglich. } (Induktion)

Die Konstruktion ist also wohldefiniert, und W_z ist rekursiv aufzählbar (wobei die Aufzählung sich aus der Konstruktion ergibt). Es gilt:

$\langle x, y, \alpha \rangle \in W_z \implies \alpha$ ist N-Folge; und für $\langle x, y_1, \alpha_1 \rangle \neq \langle x, y_2, \alpha_2 \rangle \in W_z$, sind

α_1 und α_2 verträglich (folgt aus (2): wähle Stufe $n+1$, bei welcher beide eingezählt sind).

W_z , ist demnach stark regulär.

Zu zeigen bleibt, daß W_z , die gewünschte Eigenschaft hat, d.h. daß für alle X gilt: $\bigcap_z^X = \bigcup_z^X$. Sei dies die Gleichung (*); für ihren Beweis benötigen wir vier weitere Lemmata (samt den dazugehörigen ad-hoc-Definitionen).

Lemma 4: Gelangt $\langle x, y, \alpha \rangle$ bei Stufe n in W_z , so gilt

$$x = x_n, y = y_n, D_{g'(\alpha)} \supset D_{u_n} \text{ und } D_{g''(\alpha)} \supset D_{v_n}.$$

Beweis: Ist $n = 0$, $\langle x, y, \alpha \rangle \in W_z^0$, dann gilt $x = x_0, y = y_0$, und α ist die N -Folge, die $\langle u_0, v_0 \rangle$ standard-realisiert, also $D_{g'(\alpha)} = D_{u_0}$ und $D_{g''(\alpha)} = D_{v_0}$. - Gelangt $\langle x, y, \alpha \rangle$ bei Stufe n mit $n > 0$ in W_z , so gilt nach Konstruktion $\langle x, y, \alpha \rangle = \langle x_n, y_n, \alpha \rangle$, wobei $\alpha \in K^\beta$ mit β als der N -Folge, welche $\langle u_n, v_n \rangle$ standard-realisiert (also insbesondere $D_{g'(\beta)} = D_{u_n}$ und $D_{g''(\beta)} = D_{v_n}$). Da $\alpha \in K^\beta$, folgt $D_{g'(\alpha)} \supset D_{g'(\beta)}$ und $D_{g''(\alpha)} \supset^n D_{g''(\beta)}$, also auch $D_{g'(\alpha)} \supset D_{u_n}$ und $D_{g''(\alpha)} \supset D_{v_n}$.

Definition: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei die Menge E^n definiert durch:

$$x \in E^n \iff \exists \alpha \in K_{x_n, n-1} [x \in D_{g'(\alpha)} \cup D_{g''(\alpha)}];$$

$$\text{also } E^n = \bigcup_{\alpha \in K_{x_n, n-1}} (D_{g'(\alpha)} \cup D_{g''(\alpha)})$$

$$(\text{insbesondere sei } E^0_{W_z} = K_{x_n, -1} = \emptyset \text{ und damit } E^0 = \emptyset).$$

Lemma 5: Ist D_u, D_v eine Zerlegung von E^n - da E^n endlich ist, läßt sich jede ihrer Zerlegungen durch Mengen D_u, D_v ausdrücken -, so gibt es eine N -Folge β , die $\langle u, v \rangle$ erfüllt, so daß $\beta \in K_{x_n, n-1}$ oder β $K_{x_n, n-1}$ -relevant.

Beweis: Sei D_u, D_v eine Zerlegung von E^n . Ist $K_{x_n, n-1} = \emptyset$, so ist $\emptyset$ per definitionem $K_{x_n, n-1}$ -relevant und erfüllt $\langle u, v \rangle^n$. Gelte also o.B.d.A.

$K_{x_n, n-1} \neq \emptyset$, und analog $\emptyset \notin K_{x_n, n-1}$. Um ein geeignetes β zu erhalten,

konstruieren wir in Stufen k eine N -Folge $((u_0, v_0), \dots, (u_m, v_m))$ mit $0 \leq m \leq |E^n|$ (i.e. die Mächtigkeit von E^n), so daß für alle $0 \leq k \leq m$ gilt:

Bedingung (+): $\exists \alpha_k \in K_{x_n, n-1} [((u_0, v_0), \dots, (u_k, v_k)) \subset \alpha_k \text{ oder } ((u_0, v_0), \dots, (u_k, v_k)) \{\alpha_k\}\text{-relevant}]$.

Die Länge m wird während der Konstruktion bestimmt. Dann wird $\beta =$

$= ((u_0, v_0), \dots, (u_m, v_m))$ das Gewünschte leisten.

$k = 0$: Wähle $\alpha_1 \in K_{x_n, n-1}$ beliebig. Sei (x_0, y_0) das erste Glied von α_1 .

Definiere

$$(u_0, v_0) := \begin{cases} (x_0, 1), & \text{falls } x_0 \in D_u; \\ (x_0, 0), & \text{falls } x_0 \in D_v. \end{cases}$$

(Da $x_0 \in E^n$, und D_u, D_v eine Zerlegung von E^n , ist die Fallunterscheidung für x_0 in der Definitionsbedingung für (u_0, v_0) ausschließlich und er-

schöpfend, und (u_0, v_0) daher wohldefiniert.) Wenn $(u_0, v_0) = (x_0, y_0)$, so $((u_0, v_0)) \subset \alpha_1$ ("⊂" bedeutet "Anfangsabschnitt von"); falls $(u_0, v_0) = ((x_0, 1-y_0))$, so $((u_0, v_0)) \{\alpha_1\}$ -relevant, da α_1 einziges Element von $\{\alpha_1\}$. Also Bedingung (+) für $k = 0$ erfüllt.

$k \rightarrow k+1$: Sei die N -Folge $((u_0, v_0), \dots, (u_k, v_k))$ bereits konstruiert, die nach Induktionsvoraussetzung $\langle u, v \rangle$ erfüllt. Dann muß nach (+) einer der drei folgenden Fälle vorliegen:

(1) $\exists \alpha \in K_{x_n, n-1} [((u_0, v_0), \dots, (u_k, v_k)) = \alpha]$;

(2) $((u_0, v_0), \dots, (u_k, v_k)) K_{x_n, n-1}$ -relevant;

(3) $\exists \alpha \in K_{x_n, n-1} [((u_0, v_0), \dots, (u_k, v_k)) \not\subseteq \alpha]$.

In Fall (1) setze $m = k$, also $\beta := ((u_0, v_0), \dots, (u_m, v_m)) = \alpha$, dann ist $\beta \in K_{x_n, n-1}$. Nach Ind.vor. erfüllt $\beta \langle u, v \rangle$. -

In Fall (2) setze ebenfalls $m = k$. Dann ist $\beta := ((u_0, v_0), \dots, (u_m, v_m)) K_{x_n, n-1}$ -relevant. Nach Ind.vor. erfüllt $\beta \langle u, v \rangle$. -

In Fall (3) wähle $\alpha_{k+1} \in K_{x_n, n-1}$ mit $((u_0, v_0), \dots, (u_k, v_k)) \not\subseteq \alpha_{k+1}$. Sei (x_{k+1}, y_{k+1}) die $(k+1)$ -te Komponente von α_{k+1} . Setze

$$(u_{k+1}, v_{k+1}) := \begin{cases} (x_{k+1}, 1), & \text{falls } x_{k+1} \in D_u; \\ (x_{k+1}, 0), & \text{falls } x_{k+1} \in D_v. \end{cases}$$

(Wieder ist, da D_u, D_v eine Zerlegung von E^n , und $x_{k+1} \in E^n$,

(u_{k+1}, v_{k+1}) wohldefiniert. Wenn $(u_{k+1}, v_{k+1}) = (x_{k+1}, y_{k+1})$, so gilt $((u_0, v_0), \dots, (u_k, v_k), (u_{k+1}, v_{k+1})) \subset \alpha_{k+1}$; falls

$(u_{k+1}, v_{k+1}) = (x_{k+1}, 1-y_{k+1})$, so ist $((u_0, v_0), \dots, (u_{k+1}, v_{k+1})) \{\alpha_{k+1}\}$ -relevant. Also (+) erfüllt.)

Da die Länge der α in $K_{x_n, n-1}$ beschränkt ist, gibt es eine Stufe $m+1$, bei der Fall (3) nicht mehr eintreten kann. Dann gilt für $\beta := ((u_0, v_0), \dots, (u_m, v_m))$, daß entweder $\beta \in K_{x_n, n-1}$ oder $\beta K_{x_n, n-1}$ -relevant. Gemäß der sukzessiven Definition von β durch die Glieder $n(u_i, v_i)$, $0 \leq i \leq m$, gilt dann $D_{E^1}(\beta) \subset D_u$ und $D_{E^1}(\beta) \subset D_v$, d.h. β erfüllt $\langle u, v \rangle$. Also leistet β das Gewünschte.

Definition: Die Menge X heißt n -gültig, falls $D_u \subset X$ und $D_v \subset \bar{X}$

(bezogen auf die Aufzählung $\{ \langle x_n, y_n, u_n, v_n \rangle \mid n \in \mathbb{N} \}$ von $W_{\mathcal{G}(Z)}$).

Lemma 6: Ist X n -gültig, $D_u := X \cap E^n$ und $D_v := \bar{X} \cap E^n$, so tritt einer der beiden folgenden Fälle ein:

(i) Es gibt ein $K_{x_n, n-1}$ -relevantes β , das $\langle u, v \rangle$ erfüllt;

(ii) Es gibt ein $\langle x_n, y_n, \beta \rangle$ in $W_{Z, n-1}^n$, wobei $\beta \langle u, v \rangle$ erfüllt, und $x = x_n, y = y_n$.

Beweis: Wegen $D_u \cap D_v = \emptyset$ und $D_u \cup D_v = (X \cap E^n) \cup (\bar{X} \cap E^n) = (X \cup \bar{X}) \cap E^n = \mathbb{N} \cap E^n = E^n$ ist D_u, D_v eine Zerlegung von E^n . Daher gibt es nach Lemma 5 eine N -Folge β , die $\langle u, v \rangle$ erfüllt, wobei $\beta \in K_{x_n, n-1}$ oder $\beta K_{x_n, n-1}$ -relevant.

Ist $\beta \in K_{x_n, n-1}$ -relevant, so gilt (i). Sei also o.B.d.A. $\beta \in K_{x_n, n-1}$. Dann gibt es n nach Definition von $K_{x_n, n-1}$ ein y , so daß $\langle x_n, y, \beta \rangle \in W_{Z'}^{n-1}$ (wo- bei β nach Vor. $\langle u, v \rangle$ erfüllt). Zum Nachweis von (ii) genügt es daher, $y = y_n$ zu zeigen.

Angenommen, $y \neq y_n$. Sei $\langle x_n, y, \beta \rangle$ bei Stufe m mit $m \leq n-1$ in $W_{Z'}$ gelangt. Dann gilt nach Lemma 4: $x_n = x_m$, $y = y_m$, $D_{g'}(\beta) \supset D_u$ und $D_{g''}(\beta) \supset D_v$. Insbesondere folgt $y_m \neq y_n$. Da $W_{\mathcal{G}(Z)}$ schwach regulär $\mathbb{F}$, gilt $D_{u_m} \cap D_{v_m} \neq \emptyset$ oder $D_v \cap D_u \neq \emptyset$. Dann folgt auch $D_{g'}(\beta) \cap D_v \neq \emptyset$ oder $D_{g''}(\beta) \cap D_u \neq \emptyset$. Da $\beta \langle u, v \rangle$ erfüllt, also $D_{g'}(\beta) \subset D_u$ und $D_{g''}(\beta) \subset D_v$ gilt, folgt $D_u \cap D_v \neq \emptyset$ oder $D_v \cap D_u \neq \emptyset$ - im Widerspruch zu $D_u \subset X$ und $D_v \subset \bar{X}$, sowie $D_v \subset \bar{X}$ und $D_u \subset X$ (da n -gültig)!

Lemma 7: Ist X n -gültig, so gibt es ein $\langle x_n, y_n, \alpha \rangle$ in $W_{Z'}^n$, mit $D_{g'}(\alpha) \subset X$ und $D_{g''}(\alpha) \subset \bar{X}$.

Beweis: Sei X n -gültig, $D_u = X \cap E^n$ und $D_v = \bar{X} \cap E^n$. Dann gibt es nach Lemma 6 (i) ein $K_{x_n, n-1}$ -relevantes β , das $\langle u, v \rangle$ erfüllt; oder (ii) ein $\langle x, y, \beta \rangle$ in $W_{Z'}^{n-1}$ mit $x = x_n$, $y = y_n$, wobei $\beta \langle u, v \rangle$ erfüllt. In Fall (ii) hat $\langle x, y, \beta \rangle$ die gewünschten Eigenschaften, da $D_{g'}(\beta) \subset D_u \subset X$ und $D_{g''}(\beta) \subset D_v \subset \bar{X}$. Für Fall (i) betrachte die N -Folge γ , welche $\langle u, v \rangle$ standard-realisiert. Dann gilt $D_{g'}(\beta) \subset X$ und $D_{g''}(\gamma) = D_v \subset \bar{X}$, also $D_{g'}(\beta) \cap D_{g''}(\gamma) = \emptyset$, sowie $D_{g''}(\beta) \subset \bar{X}$ und $D_{g'}(\gamma) = D_u \subset X$, also $D_{g''}(\beta) \cap D_{g'}(\gamma) = \emptyset$; also β und γ kombinierbar. Folglich gelangt - nach Konstruktion - bei Stufe n das Element $\langle x_n, y_n, \beta + \gamma \rangle$ in $W_{Z'}$, wobei $D_{g'}(\beta + \gamma) \subset D_{g'}(\beta) \cup D_{g'}(\gamma) \subset D_u \cup D_u \subset X$ und $D_{g''}(\beta + \gamma) \subset D_{g''}(\beta) \cup D_{g''}(\gamma) \subset D_v \cup D_v \subset \bar{X}$ (da X n -gültig). Also ist $\langle x_n, y_n, \alpha \rangle$ mit $\alpha = \beta + \gamma$ geeignet.

Mit Hilfe dieser Zwischenergebnisse können wir nun leicht die Gleichung (*) (von S.174) zeigen und damit den Beweis des Satzes vervollständigen.

Beweis von (*): $\Phi_{Z'}^X = \mathcal{V}_{Z'}^X$ für alle X .

" $\supset$ ": Gelte $(x, y) \in \mathcal{V}_{Z'}^X$; d.h. es gibt $\langle u, v \rangle$ derart, daß $\langle x, y, u, v \rangle \in W_{\mathcal{G}(Z)}$ mit $D_u \subset X$ und $D_v \subset \bar{X}$. Gelte $\langle x, y, u, v \rangle = \langle x_n, y_n, u_n, v_n \rangle$ für ein geeignetes n , also $x = x_n$, $y = y_n$, $D_u = D_{u_n}$ und $D_v = D_{v_n}$. Dann ist X n -gültig, und nach Lemma 7 existiert ein $\langle x_n, y_n, \alpha \rangle$ in $W_{Z'}^n$ mit $D_{g'}(\alpha) \subset X$ und $D_{g''}(\alpha) \subset \bar{X}$. Also $(x, y) \in \Phi_{Z'}^X$.

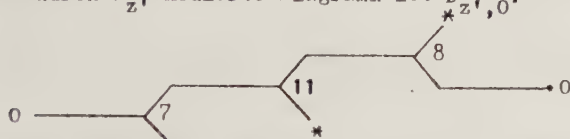
" $\subset$ ": Gelte $(x, y) \in \Phi_{Z'}^X$; d.h. es gibt ein α derart, daß $\langle x, y, \alpha \rangle \in W_{\mathcal{G}(Z)} = W_{Z'}$ mit $D_{g'}(\alpha) \subset X$ und $D_{g''}(\alpha) \subset \bar{X}$. Nach Lemma 4 gibt es dann $\langle x_n, y_n, u_n, v_n \rangle$ in $W_{\mathcal{G}(Z)}$ mit $x_n = x$, $y_n = y$, $D_{g'}(\alpha) \supset D_{u_n}$ und $D_{g''}(\alpha) \supset D_{v_n}$, also $D_u \subset X$ und $D_v \subset \bar{X}$. Id est $(x, y) \in \mathcal{V}_{Z'}^X$. Q.e.d.

Als Beispiel einer Konstruktion im Sinne des Satzes betrachten wir
 wie nach §7.2, Satz 4, reguläre - und daher (nach §7.4, Satz 4) insbesonde-
 re schwach reguläre - Menge $A = W_{\sigma(z)} = \{ \langle x_0, y_0, u_0, v_0 \rangle, \langle x_1, y_1, u_1, v_1 \rangle, \langle x_2, y_2, u_2, v_2 \rangle \} = \{ \langle 0, 0, 2^7 + 2^{11}, 2^8 \rangle, \langle 0, 0, 2^8, 2^9 \rangle, \langle 0, 0, 2^9, 2^7 \rangle \}$ (Aufzählung ohne
 Wiederholungen, $N = \{0, 1, 2\}$). Dann ist der Nachweis, daß sich aus $W_{\sigma(z)}$
 die Aufzählung einer stark regulären Menge W_z , mit $\phi_z^X = \mathcal{J}_z^X$ (für alle X)
 gewinnen läßt, gleichbedeutend damit, daß das durch W_z kodierte Diagramm
 $D_{z',0}^1$ die Berechnung von $\mathcal{J}_z^X(0)$ beschreibt. - Entsprechend unserer Konstruk-
 tionsvorschrift im Beweis des Satzes verläuft das Aufzählungsverfahren für
 W_z in Stufen W_z^n , wie folgt; dabei konstruieren wir gleichzeitig das dem-
 entsprechend schrittweise entstehende Diagramm $D_{z',0}^n$.

Stufe 0: Sei α die N -Folge, die $\langle u_0, v_0 \rangle = \langle 2^7 + 2^{11}, 2^8 \rangle$ standard-realisiert,
 also $\alpha = ((7, 1), (11, 1), (8, 0))$.

Dann ist $\langle x_0, y_0, \alpha \rangle = \langle 0, 0, ((7, 1), (11, 1), (8, 0)) \rangle$ in W_z^0 zu zählen.

Das durch W_z^0 kodierte Diagramm ist $D_{z',0}^0$:



Stufe 1: Sei α die N -Folge, die $\langle u_1, v_1 \rangle = \langle 2^8, 2^9 \rangle$ standard-realisiert, also
 $\alpha = ((8, 1), (9, 0))$.

Dann gilt $K = \{ \beta \mid \exists y [\langle 0, y, \beta \rangle \in W_z^0] \} = \{ ((7, 1), (11, 1), (8, 0)) \}$.

K kodiert den (einzigen) abgeschlossenen Ast von $D_{z',0}^0$.

Um K^α bilden zu können, haben wir zuerst die K -relevanten N -Folgen
 zu ermitteln: $((7, 1), (11, 1), (8, 1))$, $((7, 1), (11, 0))$ und $((7, 0))$,

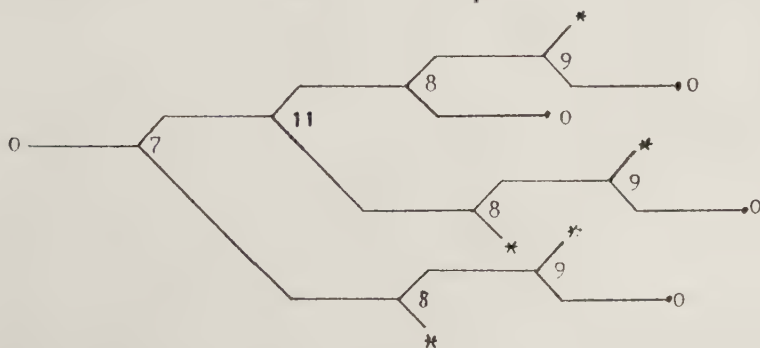
welche die (drei) offenen Äste von $D_{z',0}^0$ kodieren. Davon sind offen-
 bar alle mit α kombinierbar. Es folgt: $K^\alpha = \{ ((7, 1), (11, 1), (8, 1)),$

$(9, 0)), ((7, 1), (11, 0), (8, 1), (9, 0)), ((7, 0), (8, 1), (9, 0)) \}$. Also

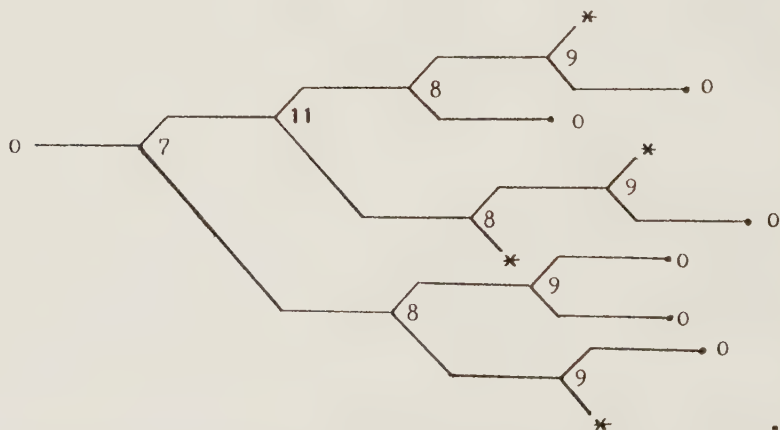
gilt: $W_z^1 = W_z^0 \cup \{ \langle 0, 0, \gamma \rangle \mid \gamma \in K^\alpha \} = \{ \langle 0, 0, ((7, 1), (11, 1), (8, 0)) \rangle,$

$\langle 0, 0, ((7, 1), (11, 1), (8, 1), (9, 0)) \rangle, \langle 0, 0, ((7, 1), (11, 0), (8, 1), (9, 0)) \rangle,$

$\langle 0, 0, ((7, 0), (8, 1), (9, 0)) \rangle \}$. - Entsprechend Lemma 3 ist $K \cup K^\alpha$ ver-
 träglich; als erweitertes Diagramm $D_{z',0}^1$ ergibt sich



Stufe 2: Sei α die N-Folge, die $\langle u_2, v_2 \rangle = \langle 2^9, 2^7 \rangle$ standard-realisiert, also $\alpha = ((9,1), (7,0))$. Es ist $K = \{\beta \mid \exists y [\langle 0, y, \beta \rangle \in W_{z^1}^1]\} =$
 $= \{((7,1), (11,1), (8,0)), ((7,1), (11,1), (8,1), (9,0)), ((7,1), (11,0), (8,1), (9,0)), ((7,0), (8,1), (9,0))\}$ - als Kodierung der (vier) geschlossenen Äste von $D_{z^1,0}^1$. Dann lauten die K-relevanten N-Folgen, welche die (fünf) offenen Äste (*) von $D_{z^1}^1$ kodieren: $((7,1), (11,1), (8,1), (9,1)), ((7,1), (11,0), (8,1), (9,1)), ((7,1), (11,0), (8,0)), ((7,0), (8,1), (9,1)), ((7,0), (8,0))$. Davon sind mit α kombinierbar: $((7,0), (8,1), (9,1)), ((7,0), (8,0))$. Dann ist $K^\alpha = \{((7,0), (8,1), (9,1)), ((7,0), (8,0), (9,1))\}$. Also $W_{z^1}^2 = W_{z^1}^1 \cup \{\langle 0, 0, \gamma \rangle \mid \gamma \in K^\alpha\} =$
 $= \{\langle 0, 0, ((7,1), (11,1), (8,0)) \rangle, \langle 0, 0, ((7,1), (11,1), (8,1), (9,0)) \rangle,$
 $\langle 0, 0, ((7,1), (11,0), (8,1), (9,0)) \rangle, \langle 0, 0, ((7,0), (8,1), (9,0)) \rangle,$
 $\langle 0, 0, ((7,0), (8,1), (9,1)) \rangle, \langle 0, 0, ((7,0), (8,0), (9,1)) \rangle\}$.
 $D_{z^1,0}^2$ lautet:



Da $W_z = W_{\mathcal{G}}(z)$ nicht mehr als drei Elemente enthält, bricht die Konstruktion nach Stufe 2 ab, und wir erhalten die - offenbar stark reguläre - Menge

$W_{k(z)} = W_{z^1} = W_{z^1}^2$, wie oben. Dann gilt: $\bar{\Phi}_{1z}^X = \mathcal{V}_z^X$ für alle X ; denn:

" $\supset$ ": Sei $(x, y) \in \mathcal{V}_z^X$; d.h. es gibt u, v derart, daß $\langle x, y, u, v \rangle \in W_{\mathcal{G}}(z)$ mit $D_u \subset X$ und $D_v \subset \bar{X}$. Dann bestehen die folgenden drei Möglichkeiten:

(i) $x = y = 0$ und $\{7, 11\} \subset X$, sowie $\{8\} \subset \bar{X}$; oder

(ii) $x = y = 0$ und $\{8\} \subset X$, sowie $\{9\} \subset \bar{X}$; oder

(iii) $x = y = 0$ und $\{9\} \subset X$, sowie $\{7\} \subset \bar{X}$. Dementsprechend folgt:

(1) $\langle 0, 0, ((7,1), (11,1), (8,0)) \rangle \in W_{z^1} = W_{\rho^1(z^1)}$, also $(0,0) \in \bar{\Phi}_{1z^1}^X$; oder

(ii) a) $7 \in X$ & $11 \in X$; dann wähle $\langle 0, 0, ((7,1), (11,1), (8,1), (9,0)) \rangle \in W_{z^1} =$
 $= W_{\rho^1(z^1)}$, und es folgt $(0,0) \in \bar{\Phi}_{1z^1}^X$.

b) $7 \in X$ & $11 \notin X$; dann wähle $\langle 0, 0, ((7,1), (11,0), (8,1), (9,0)) \rangle \in W_{z^1} =$
 $= W_{\rho^1(z^1)}$, und es folgt $(0,0) \in \bar{\Phi}_{1z^1}^X$.

$$\left. \begin{array}{l} \text{c) } 7 \notin X \text{ \& } 11 \in X \\ \text{d) } 7 \notin X \text{ \& } 11 \notin X \end{array} \right\} \text{ dann w\"ahle } \langle 0, 0, ((7, 0), (8, 1), (9, 0)) \rangle \in W_{\rho'(z')}^X,$$
 und es folgt $(0, 0) \in \Phi_{z'}^X$.

(iii) a) $8 \in X \text{ \& } 11 \in X$; dann w\"ahle $\langle 0, 0, ((7, 0), (8, 1), (9, 1)) \rangle \in W_{\rho'(z')}^X$,
 und es folgt $(0, 0) \in \Phi_{z'}^X$.

b) $8 \in X \text{ \& } 11 \notin X$; wie unter a).

$$\left. \begin{array}{l} \text{c) } 8 \notin X \text{ \& } 11 \in X \\ \text{d) } 8 \notin X \text{ \& } 11 \notin X \end{array} \right\} \text{ w\"ahle } \langle 0, 0, ((7, 0), (8, 0), (9, 1)) \rangle \in W_{\rho'(z')}^X,$$
 und es folgt $(0, 0) \in \Phi_{z'}^X$.

$\Leftarrow$: Sei $(x, y) \in \Phi_{z'}^X$; d.h. es gibt u, v derart, da\ss $\langle x, y, \alpha \rangle \in W_{\rho'(z')}^X$ mit $D_u \subset X$ und $D_v \subset \bar{X}$. Dann gilt einer der folgenden sechs F\"alle:

(i) $\langle 0, 0, ((7, 1), (11, 1), (8, 0)) \rangle \in W_{\rho'(z')}^X$, wobei $\{7, 11\} \subset X$ und $\{8\} \subset \bar{X}$;
 dann ist, da $\langle 0, 0, 2^7 + 2^{11}, 2^8 \rangle \in W_z^X$, $(x, y) \in \mathcal{V}_z^X$.

(ii) $\langle 0, 0, ((7, 1), (11, 1), (8, 1), (9, 0)) \rangle \in W_{\rho'(z')}^X$ mit $\{7, 8, 11\} \subset X$ und $\{9\} \subset \bar{X}$;
 dann ist, da $\langle 0, 0, 2^8, 2^9 \rangle \in W_z^X$ und $\{8\} \subset X$, $\{9\} \subset \bar{X}$, $(x, y) \in \mathcal{V}_z^X$.

(iii) $\langle 0, 0, ((7, 1), (11, 0), (8, 1), (9, 0)) \rangle \in W_{\rho'(z')}^X$ mit $\{7, 8\} \subset X$ und $\{9, 11\} \subset \bar{X}$; wie unter (ii).

(iv) $\langle 0, 0, ((7, 0), (8, 1), (9, 0)) \rangle \in W_{\rho'(z')}^X$ mit $\{8\} \subset X$ und $\{7, 9\} \subset \bar{X}$;
 wie unter (ii) und (iii).

(v) $\langle 0, 0, ((7, 0), (8, 1), (9, 1)) \rangle \in W_{\rho'(z')}^X$ mit $\{8, 9\} \subset X$ und $\{7\} \subset \bar{X}$; dann
 ist, da $\langle 0, 0, 2^9, 2^7 \rangle \in W_z^X$ und $\{9\} \subset X$, $\{7\} \subset \bar{X}$, $(x, y) \in \mathcal{V}_z^X$.

(vi) $\langle 0, 0, ((7, 0), (8, 0), (9, 1)) \rangle \in W_{\rho'(z')}^X$ mit $\{9\} \subset X$ und $\{7, 8\} \subset \bar{X}$; wie
 unter (v).

Damit gilt in allen F\"allen $(x, y) \in \mathcal{V}_z^X$.

§7.6 Äquivalenz von $\leq_S$ und $\leq_W$; Reflexivität und Transitivität von $\leq_T$

Wie in §7.4 geklärt, bildet $\leq_W$ die allgemeinste und per se natürlichste Charakterisierung der Turing-Reduzierbarkeit über rekursiv aufzählbare Mengen. Die Implikation von $\leq_W$ durch $\leq_S$ wurde in Satz 7 desselben Paragraphen bemerkt. Die Umkehrung zeigen wir im folgenden als Satz 1. Da nach §7.5 $\leq_S$ mit $\leq_B$ äquivalent ist, folgt dann daraus auch die Äquivalenz von $\leq_W$ und $\leq_B$ - und somit, wie am Ende von §7.1 dargelegt, die aller unserer fünf nur formal verschiedenen Präzisierungen der Turing-Reduzierbarkeit.

Satz 1: Es gibt eine rekursive Funktion k^* derart, daß gilt:

$$A \leq_W B \text{ via } z \implies A \leq_S B \text{ via } k^*(z).$$

Beweis: Gelte $A \leq_W B$ via z ; d.h. für alle $(x, y): (x, y) \in c_A \iff$

$$\iff \exists u, v [\langle x, y, u, v \rangle \in W_z \text{ \& } D_u \subset B \text{ \& } D_v \subset \bar{B}]; \text{ bzw. } c_A = \zeta_z^B.$$

Gesucht ist eine Zahl z' in effektiver Abhängigkeit von z derart, daß

$$A \leq_S B \text{ via } z'; \text{ d.h. für alle } (x, y): (x, y) \in c_A \iff (x, y) \in \zeta_{z'}^B \iff$$

$$\iff \exists u, v [\langle x, y, u, v \rangle \in W_{z'} \text{ \& } D_u \subset B \text{ \& } D_v \subset \bar{B}]. \text{ (Dann definiere } k^*(z) := z').$$

Hierzu genügt es, aus der Aufzählung von W_z effektiv die Aufzählung einer rekursiv aufzählbaren Menge $W_{z'}$ zu finden, die schwach regulär ist, und für die gilt: $(x, y) \in c_A \iff \exists u, v [\langle x, y, u, v \rangle \in W_{z'} \text{ \& } D_u \subset B \text{ \& } D_v \subset \bar{B}]$.

Sei dazu $\{ \langle x_n, y_n, u_n, v_n \rangle \mid n \in \mathbb{N} \}$ (mit Anfangsabschnitt N von $\mathbb{N}$) eine Aufzählung von W_z , bei welcher alle inkonsistenten Elemente weggelassen sind.

Bevor wir die Konstruktion von $W_{z'}$ angeben, einige Bemerkungen zur Motivation. Da $c_A = \zeta_z^B$, ist klar, daß wir jedes $\langle x_n, y_n, u_n, v_n \rangle \in W_z$ auch in $W_{z'}$ zu zählen versuchen werden. Doch kann dabei, da W_z i.a. nicht schwach regulär ist, der folgende Konflikt entstehen. Angenommen nämlich, bei Stufe n tritt einerseits ein $\langle x_n, y_n, u_n, v_n \rangle \in W_z$ auf, das als "Zeuge" für den Wert von c_A an der Stelle x_n erscheint - d.h. per definitionem, für das $D_u \subset B$, $D_v \subset \bar{B}$, und damit $c_A(x_n) = \zeta_z^B(x_n) = y_n$ gilt -, während andererseits auf "einer Stufe m mit $m < n$ bereits ein $\langle x_m, y_m, u_m, v_m \rangle$ mit $x_m = x_n$ in W_z gezählt wurde, wobei $y_m \neq y_n$ gelte, und $\langle x_n, y_n, u_n, v_n \rangle, \langle x_m, y_m, u_m, v_m \rangle$ kompatibel seien (d.h. $D_u \cap D_v = D_u \cap D_v = \emptyset$). Dann müssen wir (bei Stufe n) einen Zeugen für $c_A(x_n) \stackrel{n}{=} y_n$ in $W_{z'}$ zählen, wobei wir jedoch, um die schwache Regularität von $W_{z'}$ zu wahren, nicht einfach $\langle x_n, y_n, u_n, v_n \rangle$ nehmen dürfen. Vielmehr haben wir ein solches $\langle x_n, y_n, u, v \rangle$ zu wählen, für das sowohl $D_u \subset B$ und $D_v \subset \bar{B}$, als auch $\langle x_m, y_m, u_m, v_m \rangle, \langle x_n, y_n, u, v \rangle$ inkompatibel (d.h. $D_u \cap D_v \neq \emptyset$ oder $D_v \cap D_u \neq \emptyset$) gilt. Dabei ist zum einen die Existenz eines solchen $\langle x_n, y_n, u, v \rangle$, zum anderen seine effektive Erfassbarkeit für die Aufzählung von $W_{z'}$, zu gewährleisten. Daß es $\langle x_n, y_n, u, v \rangle$ mit den gewünschten Eigenschaften geben muß, sieht man wie folgt. Da $\langle x_n, y_n, u_n, v_n \rangle$ ein Zeuge für c_A an der Stelle x_n , und $y_m \neq y_n$ ist, kann $\langle x_m, y_m, u_m, v_m \rangle$ nicht auch ein Zeuge für $c_A(x_m) = c_A(x_n) = y_n$ sein, d.h. es darf nicht gleichzeitig $D_u \subset B$ und $D_v \subset B$ gelten. Also gibt es

ein x mit entweder (i) $x \in D_u \cap \bar{B}$, oder (ii) $x \in D_v \cap B$. Im Fall (i) definiere u, v derart, daß $D_u = D_u \cup \{x\}$ und $D_v = D_v$. Dann sind $\langle x_n, y_n, u, v \rangle$ und $\langle x_m, y_m, u_m, v_m \rangle$ inkompatibel. Daß eben ist $\langle x_n, y_n, u, v \rangle$ als Zeuge für $c_A(x_n) = y_n$ geeignet, da in jedem Fall $D_u \subset B$ und $D_v \subset \bar{B}$. - Nun können wir aber aufgrund der bisherigen Konstruktion, bei der wir Bezug auf die nicht notwendigerweise rekursive Menge B genommen haben, u und v noch nicht effektiv angeben. Um dies zu erreichen, beachte, daß für das oben zitierte x in (i) $x \in D_u \setminus D_u$, bzw. in (ii) $x \in D_v \setminus D_v$ gilt, da $D_u \subset B$ und $D_v \subset \bar{B}$. Betrachten wir deshalb alle (kodierte) Quadrupele $\langle x_n, y_n, u', v' \rangle$, für die es ein x' gibt mit $x' \in D_u \setminus D_u$, $D_{u'} = D_u$ und $D_{v'} = D_v \cup \{x'\}$, bzw. mit $x' \in D_v \setminus D_v$, $D_{u'} = D_u \cup \{x'\}$ und $D_{v'} = D_v$, so sind alle diese mit $\langle x_m, y_m, u_m, v_m \rangle$ inkompatibel, und wir können sicher sein, daß das obige $\langle x_n, y_n, u, v \rangle$ unter ihnen auftritt. Nehmen wir daher bei Stufe n alle diese - effektiv angebbaren - $\langle x_n, y_n, u', v' \rangle$ zur Menge W_z hinzu, so wird einerseits deren schwache Regularität gewahrt, und andererseits insbesondere der Zeuge $\langle x_n, y_n, u, v \rangle$ in W_z aufgenommen. Damit ist der geschilderte Konflikt effektiv behoben. Bei der nun folgenden Konstruktion, welcher diese Lösung zugrunde liegt, ist lediglich noch zu berücksichtigen, daß zu einem gegebenen $\langle x_n, y_n, u, v \rangle$ i.a. mehrere m_1 mit $m_1 < n$ existieren können, so daß der beschriebene Konflikt zwischen den Stufen n und m_1 besteht. Sie ist indes in- folgedessen für alle diese - endlich vielen - m_1 zu verallgemeinern. -

Aufzählungsverfahren für W_z in Stufen n .

Stufe 0: $\langle x_0, y_0, u_0, v_0 \rangle$ gelangt in W_z .

Stufe $n+1$: Unterscheide die drei folgenden Fälle.

1. Fall: $\exists m < n+1 [x_m = x_{n+1} \ \& \ y_m \neq y_{n+1} \ \& \ D_{u_m} \subset D_{u_{n+1}} \ \& \ D_{v_m} \subset D_{v_{n+1}}]$.
In diesem Fall ist nichts zu tun.

2. Fall: $\exists m < n+1 [x_m = x_{n+1} \ \& \ y_m \neq y_{n+1} \ \& \ \langle x_m, y_m, u_m, v_m \rangle, \langle x_{n+1}, y_{n+1}, u_{n+1}, v_{n+1} \rangle$
kompatibel & 1. Fall liegt nicht vor].

Seien $m_1, \dots, m_k$ alle Stufen m wie oben. (Insbesondere gilt dann

$$(D_{u_{m_1}} \setminus D_{u_{n+1}}) \cup (D_{v_{m_1}} \setminus D_{v_{n+1}}) \neq \emptyset \text{ für alle } i, 1 \leq i \leq k.)$$

Für jede Folge $x_1, \dots, x_k$ mit $x_i \in (D_{u_{m_i}} \setminus D_{u_{n+1}}) \cup (D_{v_{m_i}} \setminus D_{v_{n+1}})$, $1 \leq i \leq k$, zähle $\langle x_{n+1}, y_{n+1}, u, v \rangle$ in W_z , wobei m_1

$$D_u := D_{u_{n+1}} \cup \{x_i \mid 1 \leq i \leq k \ \& \ x_i \in D_{v_{m_i}}\} \text{ und} \\ D_v := D_{v_{n+1}} \cup \{x_i \mid 1 \leq i \leq k \ \& \ x_i \in D_{u_{m_i}}\}.$$

3. Fall: sonst.

Zähle $\langle x_{n+1}, y_{n+1}, u_{n+1}, v_{n+1} \rangle$ in W_z .

Dann ist W_z offenbar rekursiv aufzählbar, wobei eine Aufzählung sich aus der Konstruktion ergibt. (Dies rechtfertigt im nachhinein unsere ver- rühnte Wahl des rekursiv aufzählbaren Index z' für die erst aufzuzählende enge!) Zu zeigen bleibt: (i) $W_{z'}$ ist schwach regulär; und

(ii) $c_A = \bigcup_{z'} B$; i.e. $A \leq_S B$ via z' .

Hierfür inserieren wir drei Lemmata.

Lemma 1: Gelangt $\langle x, y, u, v \rangle$ bei Stufe n in W_Z , so gilt

$$x = x_n, y = y_n, D_u \supset D_{u_n} \text{ und } D_v \supset D_{v_n}.$$

Beweis: Gelangt $\langle x, y, u, v \rangle$ bei Stufe 0 in W_Z , so gilt $\langle x, y, u, v \rangle = \langle x_0, y_0, u_0, v_0 \rangle$,

also $x = x_0, y = y_0, D_u = D_{u_0}$ und $D_v = D_{v_0}$. - Angenommen also, $\langle x, y, u, v \rangle$ gelangt bei Stufe $n+1$ in W_Z . Dann besteht der 2. oder 3. Fall in der Konstruktion. Im 2. Fall ist $\langle x, y, u, v \rangle = \langle x_{n+1}, y_{n+1}, u, v \rangle$, wobei

$$D_u = D_{u_{n+1}} \cup \{x_1 \mid 1 \leq i \leq k \text{ \& } x_1 \in D_{u_{n+1}}\} \text{ und } D_v = D_{v_{n+1}} \cup \{x_1 \mid 1 \leq i \leq k \text{ \& } x_1 \in D_{v_{n+1}}\}.$$

Also gilt $x = x_{n+1}, y = y_{n+1}, D_u \supset D_{u_{n+1}}$ und $D_v \supset D_{v_{n+1}}$.

Lemma 2: $\langle x, y, u, v \rangle, \langle x, y', u', v' \rangle \in W_Z$, mit $y \neq y' \Rightarrow$

$\Rightarrow \langle x, y, u, v \rangle, \langle x, y', u', v' \rangle$ inkompatibel.

Beweis: Seien $\langle x, y, u, v \rangle$ und $\langle x, y', u', v' \rangle$ mit $y \neq y'$ bei Stufe n bzw. m in W_Z gelangt, o.B.d.A. $m \leq n$. Da $y \neq y'$ folgt dann aus Lemma 1, daß $m < n$. Wir zeigen durch Fallunterscheidung nach n , daß $\langle x, y, u, v \rangle$ und $\langle x, y', u', v' \rangle$ inkompatibel.
 $n = 0$: Hier ist, da $m < 0$ unmöglich, nichts zu zeigen.

$n > 0$: Fallunterscheidung entsprechend den bei Stufe n in der Konstruktion möglichen Fällen.

1. Fall: Ausgeschlossen.

2. Fall: Indirekt. Angenommen, $\langle x, y, u, v \rangle, \langle x, y', u', v' \rangle$ kompatibel.

Da nach Lemma 1 $x = x_n, y = y_n, D_u \supset D_{u_n}$ und $D_v \supset D_{v_n}$, sowie $x = x_m, y' = y_m, D_{u'} \supset D_{u_m}$ und $D_{v'} \supset D_{v_m}$, folgt wegen n

$$D_u \cap D_{v'} = D_v \cap D_{u'} = \emptyset \text{ auch } D_{u_n} \cap D_{v_m} \stackrel{m}{=} D_{v_n} \cap D_{u_m} = \emptyset. \text{ Nach}$$

dem vorliegenden Fall ($m_1 = m!$) gibt es aber ein x mit

$$x \in (D_{u_m} \setminus D_{u_n}) \cup (D_{v_m} \setminus D_{v_n}); \text{ dann gilt } x \in (D_{u_m} \cap D_{v_n}) \cup (D_{v_m} \cap D_{u_n}),$$

$$\text{also } x \in (D_{u_m} \cap D_{v_n}) \cup (D_{v_m} \cap D_{u_n}) - \text{Widerspruch!}$$

Lemma 3: $\langle x, y, u, v \rangle \in W_Z$ & $D_u \subset B$ und $D_v \subset \bar{B} \Rightarrow \exists u', v' [\langle x, y, u', v' \rangle \in W_Z, \text{ \& } D_{u'} \subset B \text{ \& } D_{v'} \subset \bar{B}]$.

Beweis: Gelte $\langle x, y, u, v \rangle \in W_Z$ & $D_u \subset B$ & $D_v \subset \bar{B}$. Dann gibt es ein n mit $\langle x, y, u, v \rangle = \langle x_n, y_n, u_n, v_n \rangle$. Wir zeigen, daß spätestens bei Stufe n ein $\langle x, y, u', v' \rangle$ in W_Z gelangt, so daß $D_{u'} \subset B$ und $D_{v'} \subset \bar{B}$.

Ist $\langle x, y, u, v \rangle = \langle x_0, y_0, u_0, v_0 \rangle$, so gelangt $\langle x, y, u', v' \rangle = \langle x_0, y_0, u_0, v_0 \rangle$ bei Stufe 0 in W_Z . Für $n > 0$ treffen wir eine Unterscheidung nach dem in der Konstruktion vorliegenden Fall.

1. Fall: Kann nicht eintreten. (Denn angenommen, es gibt ein $m < n$ mit

$$x_m = x_n, y_m \neq y_n, D_{u_m} \subset D_{u_n} \text{ und } D_{v_m} \subset D_{v_n}. \text{ Dann gilt insbesondere}$$

$$D_{u_m} \subset B \text{ und } D_{v_m} \subset \bar{B}, \text{ also } (x, y_m) \in c_A \text{ mit } y_m \neq y - \text{im Widerspruch zur Rechtseindeutigkeit von } c_A!)$$

2. Fall: Es gibt Stufen $m_1, \dots, m_k$ ($k > 1$) mit $m_1 < n$ ($1 \leq i \leq k$) derart, daß $x_{m_1} = x_n$, $y_{m_1} \neq y_n$ und $\langle x_{m_1}, y_{m_1}, u_{m_1}, v_{m_1} \rangle, \langle x_n, y_n, u_n, v_n \rangle$ kompatibel, wobei der 1. Fall nicht vorliegt. Für jedes i existiert ein x_i mit $x_i \in (D_{u_{m_1}} \setminus D_{u_n}) \cap \bar{B}$ oder $x_i \in (D_{v_{m_1}} \setminus D_{v_n}) \cap B$; denn für $(D_{u_{m_1}} \setminus D_{u_n}) \cap \bar{B} = (D_{v_{m_1}} \setminus D_{v_n}) \cap B = \emptyset$ gälte wegen $D_{u_n} \subset B$ und $D_{v_n} \subset \bar{B}$ auch $D_{u_{m_1}} \cap \bar{B} = D_{v_{m_1}} \cap B = \emptyset$, d.h. $D_{u_{m_1}} \subset B$ und $D_{v_{m_1}} \subset \bar{B}$, und folglich $(x_{m_1}, y_{m_1}) \in c_A$ im Widerspruch zur Rechtseindeutigkeit von c_A .

Dann gelangt nach Konstruktion ein $\langle x_n, y_n, u', v' \rangle$ in W_z , mit $D_{u'} = D_{u_n} \cup \{x_i \mid 1 \leq i \leq k \text{ \& } x_i \in D_{v_{m_1}}\} \subset B$ und $D_{v'} = D_{v_n} \cup \{x_i \mid 1 \leq i \leq k \text{ \& } x_i \in D_{u_{m_1}}\} \subset \bar{B}$.

3. Fall: $\langle x_n, y_n, u_n, v_n \rangle$ gelangt selbst in W_z .

Aus Lemma 2 folgt (i) (§.181 u.); aus Lemma 1 " $\supset$ ", und aus Lemma 3 " $\subset$ " der Gleichung (ii). Denn für " $\supset$ " nehme an, daß $(x, y) \in \mathcal{V}_{z,1}^B$, d.h. $\langle x, y, u, v \rangle \in \in W_z$, $D_u \subset B$ und $D_v \subset \bar{B}$ für geeignete u, v . Sei $\langle x, y, u, v \rangle$ bei Stufe n in W_z gelangt. Dann gilt nach Lemma 1, daß $x = x_n$, $y = y_n$, $D_u \supset D_{u_n}$ und $D_v \supset D_{v_n}$. Also folgt, daß $\langle x_n, y_n, u_n, v_n \rangle \in W_z$ mit $D_{u_n} \subset B$ und $D_{v_n} \subset \bar{B}$, d.h. $(x, y) \in c_A^n$. Sei umgekehrt für " $\subset$ " $(x, y) \in c_A$. Dann gibt es wegen $A \leq_w B$ via z Zahlen u, v derart, daß $\langle x, y, u, v \rangle \in W_z$ mit $D_u \subset B$ und $D_v \subset \bar{B}$. Daraus folgt nach Lemma 3 die Existenz von u', v' derart, daß $\langle x, y, u', v' \rangle \in W_z$, mit $D_{u'} \subset B$ und $D_{v'} \subset \bar{B}$, d.h., da W_z schwach regulär, $(x, y) \in \mathcal{V}_{z,1}^B$. - Damit ist der Beweis vollständig.

Korollar: Die folgenden formalen Präzisierungen der Turing-Reduzierbarkeit sind äquivalent:

- (i) $\leq_0$;
- (ii) $\leq_B$;
- (iii) $\leq_T$;
- (iv) $\leq_R$;
- (v) $\leq_w$;

Beweis: "(i) $\Rightarrow$ (ii)": §7.3, Satz 4;

"(ii) $\Rightarrow$ (iii)": nach §7.3, Satz 3;

"(iii) $\Rightarrow$ (iv)": §7.4, Satz 7;

"(iv) $\Rightarrow$ (v)": §7.4, Satz 7;

"(v) $\Rightarrow$ (i)": §7.6, Satz 1 zusammen mit §7.5, Satz.

Wie in §7.1 wiederholt angekündigt, verwenden wir das Symbol " $\leq_T$ ", ohne uns damit auf akkurat die Präzisierung unter (iii) des Korollars (nach Rogers) zu beziehen, allgemein als Bezeichnung der Turing-Reduzierbarkeit (bzw. auch einfach "T-Reduzierbarkeit") - und somit virtuell für jede der fünf nur formal unterschiedlichen Präzisierungen. Doch versteht sich von selbst, daß wir zum formalen Nachweis der Eigenschaften von $\leq_T$ gewöhnlich

auf $\leq_w$ - als deren einfachste und (über rekursiv aufzählbare Mengen) natürlichste Formalisierung - Bezug nehmen werden. Dabei ist zu beachten, daß wir im konkreten Fall neben der Aufzählung einer geeigneten Menge W_z immer noch eigens die Funktionseigenschaft von ζ_z^X nachweisen müssen, die ja i.a. nicht gegeben ist.

Diese Überlegungen gelten bereits für die nun folgenden Beweise der Reflexivität und Transitivität der Relation $\leq_T$, durch die sie im nachhinein überhaupt erst vollends als gültige Präzisierung des Reduzierbarkeitsbegriffs gerechtfertigt wird. Indem wir sie für die Formalisierung $\leq_w$ beweisen, ist - aufgrund des Korollars - ihre Gültigkeit für alle Varianten garantiert.

Satz 2: $\leq_T$ ist reflexiv.

Beweis: Zu zeigen: $A \leq_w A$ für alle A. - Definiere die Menge B durch

$B := \{ \langle x, 0, 0, 2^x \rangle \mid x \in \mathbb{N} \} \cup \{ \langle x, 1, 2^x, 0 \rangle \mid x \in \mathbb{N} \}$. Dann gibt es, da B offenbar rekursiv aufzählbar, ein z mit $B = W_z$.

Wir zeigen zuerst, daß ζ_z^X für alle X eine Funktion ist. Angenommen, $(x, y_0), (x, y_1) \in \zeta_z^X$ mit $y_0 \neq y_1$; o.B.d.A. $y_0 = 0, y_1 = 1$. Dann gibt es u_0, v_0, u_1, v_1 derart, daß $\langle x, 0, u_0, v_0 \rangle, \langle x, 1, u_1, v_1 \rangle \in W_z$ mit $D_{u_0}, D_{u_1} \subset X$ und $D_{v_0}, D_{v_1} \subset \bar{X}$. Es gilt $u_0 = 0$ und $v_0 = 2^x$, sowie $u_1 = 2^x$ und $v_1 = 0$, und demnach $D_{u_0} = \emptyset \subset X$ und $D_{v_0} = \{x\} \subset \bar{X}$, sowie $D_{u_1} = \{x\} \subset X$ und $D_{v_1} = \emptyset \subset \bar{X}$, also $x \in X$ und $x \in \bar{X}$ - Widerspruch!

Sei A beliebig. Wir zeigen: $c_A = \zeta_z^A$.

" $\subset$ ": Sei $(x, 0) \in c_A$, d.h. $x \notin A$. Dann gilt für $\langle x, 0, u, v \rangle := \langle x, 0, 0, 2^x \rangle \in W_z$, daß $D_u = \emptyset \subset A$ und $D_v = \{x\} \subset \bar{A}$, also $(x, 0) \in \zeta_z^A$. - Dagegen gilt für $(x, 1) \in c_A$, daß $x \in A$, und folglich für $\langle x, 1, u, v \rangle := \langle x, 1, 2^x, 0 \rangle \in W_z$: $D_u = \{x\} \subset A$ und $D_v = \emptyset \subset \bar{A}$; also $(x, 1) \in \zeta_z^A$.

" $\supset$ ": Sei $(x, y) \in \zeta_z^A$ mit $\langle x, y, u, v \rangle \in W_z$ für geeignete u, v. Dann gilt entweder $\langle x, y, u, v \rangle = \langle x, 0, 0, 2^x \rangle$ mit $D_v = \{x\} \subset \bar{A}$, d.h. $(x, 0) \in c_A$; oder $\langle x, y, u, v \rangle = \langle x, 1, 2^x, 0 \rangle$ mit $D_u = \{x\} \subset A$, d.h. $(x, 1) \in c_A$.

Also $A \leq_w A$ via z.

Satz 3: $\leq_T$ ist transitiv.

Beweis: Zu zeigen: Wenn $A \leq_w B$ und $B \leq_w C$, dann $A \leq_w C$.

Gelte dazu $A \leq_w B$ via z, und $B \leq_w C$ via z'. Das heißt

$c_A = \zeta_z^B = \{ (x, y) \mid \exists u, v [\langle x, y, u, v \rangle \in W_z \text{ \& } D_u \subset B \text{ \& } D_v \subset \bar{B}] \}$ und $c_B = \zeta_{z'}^C = \{ (x, y) \mid \exists u, v [\langle x, y, u, v \rangle \in W_{z'} \text{ \& } D_u \subset C \text{ \& } D_v \subset \bar{C}] \}$.

Zu zeigen: Es gibt ein z'' derart, daß $A \leq_w C$ via z''; d.h. daß

$c_A = \zeta_{z''}^C = \{ (x, y) \mid \exists u, v [\langle x, y, u, v \rangle \in W_{z''} \text{ \& } D_u \subset C \text{ \& } D_v \subset \bar{C}] \}$.

Definiere dazu die Menge W durch $W := \{ \langle x, y, u, v \rangle \mid \exists \tilde{u}, \tilde{v} [\langle x, y, \tilde{u}, \tilde{v} \rangle \in W_z \text{ \& } \forall z \in D_{\tilde{u}} \exists u', v' [\langle z, 1, u', v' \rangle \in W_{z'} \text{ \& } D_{u'} \subset D_u \text{ \& } D_{v'} \subset D_v] \text{ \& } \forall z \in D_{\tilde{v}} \exists u', v' [\langle z, 0, u', v' \rangle \in W_{z'} \text{ \& } D_{u'} \subset D_u \text{ \& } D_{v'} \subset D_v]] \}$. Dann ist W aufgrund der Projektionstheoreme rekursiv aufzählbar. (Unmittelbar ergibt

sich die rekursive Aufzählbarkeit von W aus dem folgenden stufenweisen Aufzählungsverfahren für W . Sei dazu f eine rekursive Funktion mit $\text{range } f = \bigcup_{z \in \mathbb{N}} W_z^s$, und $W_z^s := \{f(x) \mid x \leq s\}$. Dann gilt: W_z^s endlich für alle s , sowie $\bigcup_{s \in \mathbb{N}} W_z^s = W_z$. Jedes W_z^s läßt sich effektiv angeben. Analog sei W_z^s definiert.

Stufe s : Teste für jedes $z \leq s$, ob z ein Quadrupel kodiert. Wenn ja, etwa $z = \langle x, y, u, v \rangle$, prüfe, ob es $\tilde{u}, \tilde{v}$ gibt, so daß $\langle x, y, \tilde{u}, \tilde{v} \rangle \in W_z^s$, wobei $\forall z \in D_{\tilde{u}} \exists u_z, v_z [\langle z, 1, u_z, v_z \rangle \in W_z^s, \& D_u \subset D_{\tilde{u}} \& D_v \subset D_{\tilde{v}}]$ und $\forall z \in D_{\tilde{v}} \exists u_z, v_z [\langle z, 0, u_z, v_z \rangle \in W_z^s, \& D_u^z \subset D_u \& D_v^z \subset D_v]$. Ist dies der Fall, gelangt z bei Stufe s in W .

Sei $W = W_{z''}$, für ein geeignetes z'' . Dann gilt für alle (x, y) :

$$\begin{aligned} (x, y) \in \zeta_{z''}^C &\iff \exists u, v [\langle x, y, u, v \rangle \in W_{z''} \& D_u \subset C \& D_v \subset \bar{C}] \iff \\ &\iff \exists u, v [\exists \tilde{u}, \tilde{v} [\langle x, y, \tilde{u}, \tilde{v} \rangle \in W_{z''} \& \forall z \in D_{\tilde{u}} \exists u_z, v_z [\langle z, 1, u_z, v_z \rangle \in W_{z''} \& D_u \subset D_{\tilde{u}} \& D_v \subset D_{\tilde{v}}] \& \forall z \in D_{\tilde{v}} \exists u_z, v_z [\langle z, 0, u_z, v_z \rangle \in W_{z''} \& D_u^z \subset D_u \& D_v^z \subset D_v]]] \iff \\ &\iff \exists \tilde{u}, \tilde{v} [\langle x, y, \tilde{u}, \tilde{v} \rangle \in W_{z''} \& \forall z \in D_{\tilde{u}} \exists u_z, v_z [\langle z, 1, u_z, v_z \rangle \in W_{z''} \& D_u \subset C \& D_v \subset \bar{C}] \& \forall z \in D_{\tilde{v}} \exists u_z, v_z [\langle z, 0, u_z, v_z \rangle \in W_{z''} \& D_u \subset C \& D_v \subset \bar{C}]] \iff \\ &\iff \exists \tilde{u}, \tilde{v} [\langle x, y, \tilde{u}, \tilde{v} \rangle \in W_{z''} \& \forall z \in D_{\tilde{u}} [(z, 1) \in \zeta_{z''}^C] \& \forall z \in D_{\tilde{v}} [(z, 0) \in \zeta_{z''}^C]] \iff \\ &\iff (x, y) \in \zeta_{z''}^B \iff (x, y) \in c_A. \end{aligned}$$

Also $c_A = \zeta_{z''}^B$, d.h. $A \leq_W C$ via z'' . Q.e.d.

Erst durch Satz 2 und Satz 3 sind (i) bis (v) des Korollars als gültige Präzisierungen der Reduzierbarkeitsrelation legitimiert. Dabei bildet der rein formale effektive Beweis ihrer Äquivalenz ein gewichtiges Argument für die Plausibilität der Relativierten Church'schen These: daß durch jede von ihnen der intuitive Reduzierbarkeitsbegriff in seiner ganzen Allgemeinheit erfaßt wird. Infolgedessen muß auch die in §4.4 als Satz 2 intuitiv geführte Reduktion von $\tilde{K}$ auf K sich nun rein formal für den Begriff $\leq_T$ rekapitulieren lassen; umgekehrt jedoch scheint nicht zuletzt auch diese Verifikation als Argument für die Gültigkeit der Relativierten These von Church noch wesentlich. Wir bringen sie unter Satz 5. Zuvor aber der - ebenfalls rein formale - Nachweis, daß $\leq_T$ eine Verallgemeinerung (und mithin, nach §4.4, Satz 1, eine echte Verallgemeinerung) von $\leq_{tt}$ darstellt. Wie in den vorangehenden Sätzen verwenden wir auch hierzu $\leq_W$ als die bequemste Definition der T-Reduzierbarkeit.

Satz 4: $A \leq_{tt} B \implies A \leq_T B$.

Beweis: Zu zeigen: $A \leq_{tt} B \implies A \leq_W B$. Gelte dazu $A \leq_{tt} B$ via f ; d.h. für alle x : $x \in A \iff B$ erfüllt die tt -Bedingung $f(x) = ((x_1, \dots, x_k), \alpha) \iff \alpha(c_B(x_1), \dots, c_B(x_k)) = 1$. Bilde zu jedem x die Menge C_x wie folgt. Berechne $f(x) = ((x_1, \dots, x_k), \alpha)$. Sei 0_α die Menge der Nullstellen von α , 1_α die Menge der Einsstellen von α , d.h.

$0_\alpha := \{(y_1, \dots, y_k) \in \{0, 1\}^k \mid \alpha(y_1, \dots, y_k) = 0\}$ und

$1_\alpha := \{(y_1, \dots, y_k) \in \{0, 1\}^k \mid \alpha(y_1, \dots, y_k) = 1\}$.

Für jedes $(y_1, \dots, y_k) \in \{0, 1\}^k$ erstelle die - endliche - Menge aller Komponenten x_1 von $(x_1, \dots, x_k)$ mit $y_1 = 1$, bzw. die Menge aller x_j mit $y_j = 0$ ($1 \leq i, j \leq k$). Gelte $D_u = \{x_1 \mid 1 \leq i \leq k \text{ \& } y_1 = 1\}$, $D_v = \{x_j \mid 1 \leq j \leq k \text{ \& } y_j = 0\}$.

Für $(y_1, \dots, y_k) \in 0_\alpha$ zähle $\langle x, 0, u, v \rangle$ in C_x , für $(y_1, \dots, y_k) \in 1_\alpha$ zähle $\langle x, 1, u, v \rangle$ in C_x . - Definiere $C := \bigcup_{x \in \mathbb{N}} C_x$; dann ist C als rekursive Vereinigung endlicher Mengen offenbar rekursiv aufzählbar. Sei $C = \mathbb{W}_z$.

Wir zeigen, daß ζ_z^B eine Funktion ist. Angenommen, $(x, y_0), (x, y_1) \in \zeta_z^B$ mit $y_0 \neq y_1$; o.B.d.A. $y_0 = 0$, $y_1 = 1$. Dann gibt es u_0, v_0, u_1, v_1 derart, daß $\langle x, 0, u_0, v_0 \rangle, \langle x, 1, u_1, v_1 \rangle \in \mathbb{W}_z$ mit $D_{u_0}, D_{u_1} \subset B$ und $D_{v_0}, D_{v_1} \subset \bar{B}$, wobei $D_{u_0} = \{x_1 \mid 1 \leq i \leq k \text{ \& } y_1 = 1\}$ und $D_{v_0} = \{x_j \mid 1 \leq j \leq k \text{ \& } y_j = 0\}$ für eine Einstelle $(y_1, \dots, y_k)$ von α , sowie $D_{u_1} = \{x_1 \mid 1 \leq i \leq k \text{ \& } y_1 = 1\}$ und $D_{v_1} = \{x_j \mid 1 \leq j \leq k \text{ \& } y_j = 0\}$ für eine Nullstelle $(y_1, \dots, y_k)$ von α (für $((x_1, \dots, x_k), \alpha) = f(x)$). Dann folgt aufgrund der Voraussetzung über $D_{u_0}, D_{u_1}, D_{v_0}$ und D_{v_1} : $D_{u_0} = D_{u_1}$ und $D_{v_0} = D_{v_1}$, d.h. $(x_1, \dots, x_k) \in 0_\alpha \cap 1_\alpha$ - Widerspruch!

Wir zeigen: $c_A = \zeta_z^B$.

" $\subset$ ": $(x, 0) \in c_A \Rightarrow x \notin A \Rightarrow f(x) = ((x_1, \dots, x_k), \alpha)$ nicht von B erfüllt $\Rightarrow (c_B(x_1), \dots, c_B(x_k)) \in 0_\alpha$. Dann ist $\langle x, 0, u, v \rangle \in C_x \subset \mathbb{W}_z$ mit $D_u = \{x_1 \mid 1 \leq i \leq k \text{ \& } c_B(x_1) = 1\} \subset B$ und $D_v = \{x_j \mid 1 \leq j \leq k \text{ \& } c_B(x_j) = 0\} \subset \bar{B}$. Also $(x, 0) \in \zeta_z^B$. - Für $(x, 1) \in c_A$, d.h. $x \in A$, dagegen ist $f(x) = ((x_1, \dots, x_k), \alpha)$ von B erfüllt, also $(c_B(x_1), \dots, c_B(x_k)) \in 1_\alpha$. Dann ist $\langle x, 1, u, v \rangle \in \mathbb{W}_z$ mit $D_u \subset B$ und $D_v \subset \bar{B}$ wie oben. Also $(x, 1) \in \zeta_z^B$.

" $\supset$ ": Da c_A total, $c_A \subset \zeta_z^B$, und ζ_z^B Funktion, gilt auch $\zeta_z^B \subset c_A$.

Folglich $A \leq_w B$ via z. Q.e.d.

Satz 5: $\tilde{K} \leq_{\mathbb{P}} K$.

Beweis: Es galt $\tilde{K} = \{x \mid \mathcal{G}_x(x) = y \text{ definiert \& } y \text{ von } K \text{ erfüllt}\}$ (vgl. S.107).

Zu zeigen: $\tilde{K} \leq_w K$; d.h. es gibt ein z derart, daß $c_{\tilde{K}} = \zeta_z^K = \{(x, y) \mid \exists u, v \langle x, y, u, v \rangle \in \mathbb{W}_z \text{ \& } D_u \subset K \text{ \& } D_v \subset \bar{K}\}$. -

Definiere $B_0 := \{\langle x, 0, 0, z^x \rangle \mid x \in \mathbb{N}\}$ und konstruiere weiter eine Menge B_1 wie folgt. Sei $K = \text{range } f$ mit rekursivem f . Für beliebiges s berechne $f(s) \in K$. Dann ist die tt-Bedingung $\mathcal{G}_{f(s)}(f(s)) = ((x_1, \dots, x_k), \alpha)$ definiert. Seien $0_\alpha, 1_\alpha$ wie im Beweis von Satz 4 definiert. Für jedes $(y_1, \dots, y_k) \in 0_\alpha$ zähle $\langle f(s), 0, u, v \rangle$ in B_1 ; für jedes $(y_1, \dots, y_k) \in 1_\alpha$ $\langle f(s), 1, u, v \rangle$, wobei $D_u = \{x_1 \mid 1 \leq i \leq k \text{ \& } y_1 = 1\}$, $D_v = \{x_j \mid 1 \leq j \leq k \text{ \& } y_j = 0\}$. Dann ist $B_0 \cup B_1$ offenbar rekursiv aufzählbar. Gelte $B_0 \cup B_1 = \mathbb{W}_z$.

Wir zeigen, daß ζ_z^K eine Funktion ist. Angenommen, $(x, y_0), (x, y_1) \in \zeta_z^K$ und $y_0 \neq y_1$, o.B.d.A. $y_0 = 0$, $y_1 = 1$. Dann gibt es u_0, v_0, u_1, v_1 derart, daß $\langle x, 0, u_0, v_0 \rangle, \langle x, 1, u_1, v_1 \rangle \in \mathbb{W}_z$ mit $D_{u_0}, D_{u_1} \subset K$ und $D_{v_0}, D_{v_1} \subset \bar{K}$. Dann gilt

entweder (i) $\langle x, 0, u_0, v_0 \rangle \in B_0$ & $\langle x, 1, u_1, v_1 \rangle \in B_1$; oder

(ii) $\langle x, 0, u_0, v_0 \rangle, \langle x, 1, u_1, v_1 \rangle \in B_1$.

In Fall (i) gilt zum einen $v_0 = 2^x$, also $x \in \tilde{K}$, und zum andern $x = f(s) \in K$ (für geeignetes s) - Widerspruch! In Fall (ii) sei $x = f(s) \in K$ für geeignetes s , und $\mathcal{G}_{f(s)}(f(s)) = ((x_1, \dots, x_k), \alpha)$. Dann gibt es $(y_1, \dots, y_k) \in \mathcal{Q}_\alpha$ derart, daß $D_u = \{x_i \mid 1 \leq i \leq k \text{ \& } y_i = 1\}$ und $D_v = \{x_j \mid 1 \leq j \leq k \text{ \& } y_j = 0\}$; und $(y_1^0, \dots, y_k^0) \in \mathbf{1}_\alpha$, so daß $D_u = \{x_i \mid 1 \leq i \leq k \text{ \& } y_i^0 = 1\}$ und $D_v = \{x_j \mid 1 \leq j \leq k \text{ \& } y_j^0 = 0\}$. Wegen $D_u, D_v \subset K$ und $D_u, D_v \subset \tilde{K}$ gilt für alle $i, 1 \leq i \leq k$, $c_K(x_i) = y_i$ und $c_K(x_i)^0 = y_i^0$, d.h. $y_i = y_i^0$ - im Widerspruch zur Rechtseindeutigkeit von α .

Wir zeigen: $c_{\tilde{K}} = \zeta_z^K$.

" $\subset$ ": Sei $(x, 1) \in c_{\tilde{K}}$, d.h. $x \in \tilde{K}$, also $x \in K$ und $\mathcal{G}_x(x)$ von K erfüllt. Sei $x = f(s)$, und $\mathcal{G}_{f(s)}(f(s)) = ((x_1, \dots, x_k), \alpha)$ von K erfüllt, d.h. $(c_K(x_1), \dots, c_K(x_k)) \in \mathbf{1}_\alpha$. Dann gilt $\langle f(s), 1, u, v \rangle \in W_z$ mit $D_u = \{x_i \mid 1 \leq i \leq k \text{ \& } c_K(x_i) = 1\} \subset K$ und $D_v = \{x_j \mid 1 \leq j \leq k \text{ \& } c_K(x_j) = 0\} \subset \tilde{K}$, also $(f(s), 1) \in \zeta_z^K$, i.e. $(x, 1) \in \zeta_z^K$. - Für $(x, 0) \in c_{\tilde{K}}$ gilt entweder (i) $x \notin K$; oder (ii) $x \in K$ & $\mathcal{G}_x(x)$ nicht von K erfüllt. In (i) folgt: $\langle x, 0, 0, 2^x \rangle \in B_0$ & $x \notin K$, also $\langle x, 0, 0, 2^x \rangle \in W_z$ & $D_0 = \emptyset \subset K$ & $D_{2^x} = \{x\} \subset \tilde{K}$, und daher $(x, 0) \in \zeta_z^K$. In (ii) gibt es ein s , so daß $x = f(s)$ & $\mathcal{G}_{f(s)}(f(s)) = ((x_1, \dots, x_k), \alpha)$ nicht von K erfüllt, also $(c_K(x_1), \dots, c_K(x_k)) \in \mathcal{Q}_\alpha$. Dann ist $\langle f(s), 0, u, v \rangle \in W_z$ mit $D_u = \{x_i \mid 1 \leq i \leq k \text{ \& } c_K(x_i) = 1\} \subset K$ und $D_v = \{x_j \mid 1 \leq j \leq k \text{ \& } c_K(x_j) = 0\} \subset \tilde{K}$, i.e. $(x, 0) \in \zeta_z^K$.

" $\supset$ ": Da $c_{\tilde{K}}$ total, und ζ_z^K Funktion, folgt $c_{\tilde{K}} \supset \zeta_z^K$.

Also $c_{\tilde{K}} = \zeta_z^K$, i.e. $\tilde{K} \leq_T K$ via z . Q.e.d.

Nach Satz 5 ist nun im Rahmen unserer Untersuchungen kein Grund mehr ersichtlich, welcher als stichhaltiger Einwand gegen die Relativierte Church'sche These vorzubringen wäre. Wir können daher $\leq_T$ (in der Präzisierung durch $\leq_s$ bzw. $\leq_w$) vorbehaltlos als den grundlegendsten Begriff von Reduzierbarkeit betrachten: "In the literature, Turing reducibility is commonly taken to be the most fundamental reducibility" (Rogers(1967), S. 137). Doch gilt, wie Rogers hinzufügt, im Fall von $\leq_T$ gewöhnlich auch einer der stärkeren Reduzierbarkeitsbegriffe $\leq_m$ oder $\leq_1$. Ihnen gegenüber werden $\leq_T$ und $\leq_{tt}$ als die schwachen Reduzibilitäten bezeichnet. Gebraucht man den Begriff "reduzierbar" ohne nähere Bestimmung, ist gewöhnlich die T-Reduzierbarkeit gemeint. Desgleichen sind unter den Unlösbarkeitsgraden im allgemeinen Sinn die Turing-Grade zu verstehen, die wir in kanonischer Weise definieren. Auch unter den schlechthin vollständigen Mengen sind die Turing-vollständigen angesprochen.

Definition: $A \equiv_T B :\iff A \leq_T B \ \& \ B \leq_T A$.

Die Äquivalenzklassen von $\equiv_T$ heißen Turing-Grade (T-Grade).

Für eine Menge A bezeichnet $d_T(A)$ den T-Grad von A .

Ein T-Grad heißt rekursiv aufzählbar, wenn er eine rekursiv aufzählbare Menge enthält.

Definition: A heißt Turing-vollständig (T-vollständig, bzw. vollständig),

wenn (i) A rekursiv aufzählbar; und

(ii) $\forall B [B \text{ rekursiv aufzählbar} \implies B \leq_T A]$.

Als Beispiele für T-vollständige Mengen können wir all jene betrachten, welche sich bereits als 1-vollständig ($1 \in \{1, m, tt, btt\}$) erwiesen haben. Insbesondere sind die Mengen K, K_0 und $\{x \mid w_x \neq \emptyset\}$ vollständig (vgl. §1.4, S. 33f.; §2.2, S.44f.; sowie §3.2). Weiter behandeln wir vollständige Mengen im nächsten Kapitel.

Wie wir für jede unserer Präzisierungen von $\leq_T$ - als eine notwendige Bedingung für deren Adäquatheit - eigens nachgewiesen haben, folgt aus der Beziehung $A \leq_T B$ zusammen mit der Rekursivität von B auch die Rekursivität von A . Daneben folgt aus Satz 4 und §4.2, Satz 3 (S.98): $A \text{ rekursiv} \implies \forall B [A \leq_T B]$. Aus beidem ergibt sich, daß die T - R e d u z i e r b a r k e i t s o r d n u n g den Grad der rekursiven Mengen als kleinstes Element besitzt.

Satz 4 impliziert unmittelbar: $A \equiv_{tt} B \implies A \equiv_T B$; wir können daher einen T-Grad als aus tt-Graden zusammengesetzt betrachten. Wegen $\tilde{K} \equiv_T K$ (vgl. Satz 5) neben $\tilde{K} \not\equiv_{tt} K$ (§4.4, Satz 1) besteht der T-Grad von K , i.e. der "vollständige" T-Grad, aus mehr als einem tt-Grad. In §8.2 werden wir sehen, daß er mehr als einen rekursiv aufzählbaren tt-Grad enthält. Dort werden wir die Beziehung zwischen T- und tt-Graden des näheren untersuchen.

§8.1 Die relativierte Theorie

In Kapitel I bis Kapitel VI hatten wir wesentlich mit partiell rekursiven Funktionen zu tun. In Kapitel VII wurde die partiell λ -rekursive Funktion präzisiert. Ersetzen wir nun, für eine feste Menge A , in unserer Theorie in allen Definitionen und Sätzen die partiell rekursiven Funktionen durch die partiell A -rekursiven, so erhalten wir eine relativierte Theorie. Unter solch einer vollständigen Relativierung behält die gesamte bisher entwickelte Theorie ihre Gültigkeit. (Auf Begriffe und Resultate, wie sie im Rahmen einer nur partiell relativierten Theorie auftreten - wobei in vielen Fällen ein bestimmter Begriff auf unterschiedliche Art teilweise zu relativieren ist -, gehen wir nicht ein, sondern nehmen, soweit wir relativierte Konzepte behandeln, ausnahmslos vollständige Relativierung an.) Analog der Berechenbarkeit läßt auch die rekursive Aufzählbarkeit sich relativieren, was zu den folgenden Definitionen führt (vgl. §7.2, S.152). Da wir uns im folgenden wieder an Rogers(1967) orientieren, verwenden wir anstelle von $\mathcal{R}_Z^A$ und $\mathcal{E}_Z^A$ wieder $\mathcal{Q}_Z^A$ als Bezeichnung der partiell A -rekursiven Funktion; dabei ist dann nicht die Regularität, sondern allenfalls die schwache Regularität der zugehörigen Menge W_Z zu beweisen - sofern wir nicht bereits mit beliebigen W_Z 's auskommen. Formalen Turing-Reduktionen schicken wir gewöhnlich das intuitive Argument voraus; gelegentlich wollen wir uns - vermöge der Relativierten Church'schen These - ganz auf die intuitive Reduktion beschränken.

- Definition:** (i) A heißt rekursiv aufzählbar in B , wenn $A = \emptyset$ oder $A = \text{range } f$ für eine B -rekursive Funktion f .
- (ii) Sei R eine k_1 -stellige und S eine k_2 -stellige Relation. Dann heißt R rekursiv (bzw. rekursiv aufzählbar) in S , wenn dies für ihre Kodierungen gilt - i.e. wenn $\tau^{k_1}(R)$ rekursiv (bzw. rekursiv aufzählbar) in $\tau^{k_2}(S)$ ist.
- ψ heißt partiell R -rekursiv, wenn ψ partiell $\tau^{k_1}(R)$ rekursiv ist. f heißt R -rekursiv, wenn f $\tau^{k_1}(R)$ -rekursiv ist.
- (iii) $W_Z^X := \text{domain } \mathcal{Q}_Z^X$.
- (iv) $K_Z^A := \{x \mid \mathcal{Q}_x^A(x) \text{ definiert}\} = \{x \mid x \in W_Z^A\}$.

Damit lassen sich die Resultate über rekursive Aufzählbarkeit, die wir in §1.4 (S.24f.) anführten, parallelisieren. Es gilt der Satz, daß A genau dann rekursiv in B ist, wenn sowohl A als auch $\bar{A}$ rekursiv aufzählbar in B ist. Da jede Funktion eine Relation ist, gilt: f A -rekursiv $\Leftrightarrow f$ rekursiv in A ;

sowie: ψ partiell A-rekursiv $\Leftrightarrow \psi$ rekursiv aufzählbar in A; und: f rekursiv aufzählbar in A $\Leftrightarrow f$ rekursiv in A; A rekursiv in B $\Leftrightarrow c_A$ rekursiv in B $\Leftrightarrow c_A$ rekursiv in c_B $\Leftrightarrow A$ rekursiv in c_B . - Der relativierte Hauptsatz über rekursiv aufzählbare Mengen (vgl. S.25 zum unrelativierten) besagt, daß A genau dann rekursiv aufzählbar in B ist, wenn es ein z mit $A = W_z^B$ gibt. - Die relativierten Projektionstheoreme lauten zum einen, daß falls R rekursiv aufzählbar in A ist, es eine in A rekursive Relation S gibt, so daß R eine Projektion von S ist; zum andern, daß falls R rekursiv aufzählbar in A ist, jede Projektion von R rekursiv aufzählbar in A ist. - Schließlich gelten auch mehrere Versionen des relativierten s-m-n-Theorems. - Vermittelst der Menge K^A beweisen wir, daß es zu einer beliebigen Menge A eine Menge B gibt, die rekursiv aufzählbar in A, nicht jedoch rekursiv in A ist.

Satz 1: $\forall A \exists B [B \text{ rekursiv aufzählbar in } A \ \& \ B \text{ nicht rekursiv in } A]$.

Beweis: Sei A gegeben. Betrachte $B = K^A$. Dann gilt:

- (i) B ist rekursiv aufzählbar in A. - Dazu genügt es kraft des relativierten Hauptsatzes über rekursiv aufzählbare Mengen, die Existenz eines z mit $B = W_z^A$ zu zeigen. Definiere die partielle Funktion ψ durch

$$\psi(x) := \begin{cases} g_x^A(x), & \text{falls definiert;} \\ \text{undefiniert, sonst.} \end{cases}$$

Dann ist ψ offenbar partiell A-rekursiv, also $\psi = g_z^A$ für geeignetes z. Für alle x gilt: $x \in W_z^A \Leftrightarrow x \in \text{domain } \psi \Leftrightarrow g_x^A(x) \text{ definiert} \Leftrightarrow x \in K^A$; d.h. $B = W_z^A$.

- (ii) B ist nicht rekursiv in A. - Denn angenommen, K^A rekursiv in A. Dann ist aufgrund eines zuvor zitierten Resultats über relativierte rekursive Aufzählbarkeit auch $\overline{K^A}$ rekursiv aufzählbar in A, also $\overline{K^A} = W_{x_0}^A$ für geeignetes x_0 . Dann folgt: $x_0 \in K^A \Leftrightarrow x_0 \in W_{x_0}^A \Leftrightarrow x_0 \in \overline{K^A}$ - Widerspruch!

Den folgenden Satz benötigen wir als Lemma für §8.2, Satz 4.

Satz 2: K^A ist in bezug auf $\leq_1$ maximal unter den in A rekursiv aufzählbaren Mengen.

Beweis: (i) K^A rekursiv aufzählbar in A nach Satz 1.

- (ii) Sei B rekursiv aufzählbar in A, $B = W_z^A$ für geeignetes z.

Definiere

$$\psi(x, \langle w, y, u, v \rangle) := \begin{cases} 1, & \text{wenn } \langle x, y, u, v \rangle \in W_z; \\ \text{undefiniert, sonst.} \end{cases}$$

Dann gibt es nach dem s-m-n-Theorem eine rekursive Funktion f derart, daß für alle x

$$\mathcal{G}_{f(x)}(\langle w, y, u, v \rangle) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } \langle x, y, u, v \rangle \in W_Z; \\ \text{undefiniert,} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Sei f o.B.d.A. injektiv (Verfahren von Davis). Dann gilt $W_{f(x)} = \{ \langle w, y, u, v \rangle \mid \langle x, y, u, v \rangle \in W_Z \}$; und für alle y, u, v : $\langle f(x), y, u, v \rangle \in W_{f(x)} \iff \langle x, y, u, v \rangle \in W_Z$. Es folgt: $f(x) \in W_{f(x)}^A \iff \mathcal{G}_{f(x)}^A(f(x))$ definiert $\iff \exists y [(f(x), y) \in \mathcal{G}_{f(x)}^A] \iff \exists u, v [\langle f(x), y, u, v \rangle \in W_{f(x)} \text{ \& } D_u \subset A \text{ \& } D_v \subset \bar{A}] \iff \exists u, v [\langle x, y, u, v \rangle \in W_Z \text{ \& } D_u \subset A \text{ \& } D_v \subset \bar{A}] \iff (x, y) \in \mathcal{G}_Z^A \iff x \in W_Z^A = B$. Also: $x \in B \iff f(x) \in W_{f(x)}^A \iff f(x) \in K^A$; d.h. $B \leq_1 K^A$ via f .

§8.2 Einfache Eigenschaften von $\leq_T$

Da $\leq_T$ die allgemeinste Präzisierung des intuitiven Reduzierbarkeitsbegriffs darstellt, erscheint es nur als selbstverständlich, daß sich alle in der Einleitung (vgl. S.6f.) als für ihn wünschenswert formulierten Bedingungen nun für $\leq_T$ formal nachweisen lassen. Im wesentlichen galt dies bereits für $\leq_{tt}$, und da - nach §7.6, Satz 4 - $\leq_T$ eine (echte) Verallgemeinerung von $\leq_{tt}$ ist, sind die entsprechenden Resultate sofort zu übertragen. So ergibt sich aus §4.2, Satz 2, unmittelbar, daß eine Menge A und ihr Komplement $\bar{A}$ in demselben T-Grad liegen. Daß ferner alle rekursiven Mengen in einen T-Grad fallen, welcher das kleinste Element der T-Reduzierbarkeitsordnung bildet (vgl. Einleitung S.7), wurde - mithilfe von §4.2, Satz 3 - bereits am Ende von §7.6 konstatiert. Es folgt als Satz 1 dieses Paragraphen in Analogie zu §4.2, Satz 6 (S.99f.), daß die T-Reduzierbarkeitsordnung einen oberen Halbverband bildet; wie im Fall von $\leq_{tt}$, ist auch für die T-Grade von A und B der T-Grad von $A \text{ Jung } B$ eine kleinste obere Schranke in der T-Reduzierbarkeitsordnung. Satz 2 rekapituliert Satz 8 aus §4.2 für $\leq_T$: jeder T-Grad enthält genau abzählbar unendlich viele Elemente. In Übereinstimmung mit der Intuition, daß für beliebige auf eine Menge C reduzierbare Mengen A und B auch deren Durchschnitt $A \cap B$ und Vereinigung $A \cup B$ auf C reduzierbar sind (vgl. Einleitung, S.7), beweisen wir - analog §4.2, Satz 7 - als Satz 3, daß für eine beliebige Menge B die Klasse $\mathcal{B}_T(B)$ aller auf B T-reduzierbaren Mengen eine Boolesche Algebra (bzgl. $\cap$ und $\cup$) bildet. Dabei benützen wir, ohne im einzelnen die Formalisierung von $\leq_T$ heranzuziehen, einfach die bekannte Tatsache, daß A und B sich auf $A \text{ Jung } B$ tt-reduzieren lassen. Überhaupt werden wir, wie bereits bemerkt, in den Beweisen die relativ umständliche formale Definition von $\leq_T$ gelegentlich meiden, um uns stattdessen mit einer durchaus plausiblen intuitiven Argumentation zu begnügen. Durchwegs aber werden wir der formalen Durchführung das intuitive Argument vorangehen lassen.

Satz 1: Die T-Reduzierbarkeitsordnung ist ein oberer Halbverband.

Beweis: Zu zeigen: Zu je zwei Graden $d_T(A)$ und $d_T(B)$ existiert eine kleinste obere Schranke in der T-Reduzierbarkeitsordnung. Betrachte dazu $d_T(A \text{ Jung } B)$. Da nach §4.2, Satz 6, $d_{tt}(A \text{ Jung } B)$ eine obere Schranke von $d_{tt}(A)$ und $d_{tt}(B)$ in der tt-Reduzierbarkeitsordnung ist, ist $d_T(A \text{ Jung } B)$ eine obere Schranke von $d_T(A)$ und $d_T(B)$ in der T-Reduzierbarkeitsordnung. - Bleibt zu zeigen, daß $d_T(A \text{ Jung } B)$ die kleinste obere Schranke von $d_T(A)$ und $d_T(B)$ ist. Sei dazu C mit $A \leq_T^C C$ und $B \leq_T^C C$ gegeben; d.h. es gibt z_1 und z_2 derart, daß $c_A = \varphi_{z_1}^C$ und $c_B = \varphi_{z_2}^C$. Dann gilt

$$c_{\text{AjungB}}(x) = \begin{cases} c_A(\frac{x}{2}), & \text{wenn } x \text{ gerade;} \\ c_B(\frac{x-1}{2}), & \text{wenn } x \text{ ungerade} \end{cases} = \begin{cases} \mathcal{G}_{z_1}^C(\frac{x}{2}), & \text{wenn } x \text{ gerade;} \\ \mathcal{G}_{z_2}^C(\frac{x-1}{2}), & \text{wenn } x \text{ ungerade} \end{cases}.$$

Aus z_1 und z_2 läßt sich effektiv ein Index z_3 berechnen mit $c_{\text{AjungB}}(x) = \mathcal{G}_{z_3}^C(x)$ für alle x . Also gilt $\text{AjungB} \leq_T C$ via z_3 .

Formal ist W_{z_3} in Abhängigkeit von W_{z_1} und W_{z_2} wie folgt zu definieren:

$$W_{z_3} = \{ \langle 2x, y, u, v \rangle \mid \langle x, y, u, v \rangle \in W_{z_1} \} \cup \{ \langle 2x+1, y, u, v \rangle \mid \langle x, y, u, v \rangle \in W_{z_2} \}.$$

Dann ist $\mathcal{G}_{z_3}^C$ eine Funktion. Denn angenommen, $(x, y_0), (x, y_1) \in \mathcal{G}_{z_3}^C$ mit $y_0 \neq y_1$, o.B.d.A. $y_0=0, y_1=1$. Seien u_0, v_0, u_1, v_1 derart, daß $\langle x, 0, u_0, v_0 \rangle, \langle x, 1, u_1, v_1 \rangle \in W_{z_3}$, wobei $D_{u_0}, D_{u_1} \subset C$ und $D_{v_0}, D_{v_1} \subset \bar{C}$. Ist x gerade, so gilt $\langle \frac{x}{2}, 0, u_0, v_0 \rangle, \langle \frac{x}{2}, 1, u_1, v_1 \rangle \in W_{z_1}$, und folglich $(\frac{x}{2}, 0), (\frac{x}{2}, 1) \in \mathcal{G}_{z_1}^C$ - im Widerspruch zur

Rechtseindeutigkeit von $\mathcal{G}_{z_1}^C$. Für ungerades x hingegen gilt $\langle \frac{x-1}{2}, 0, u_0, v_0 \rangle, \langle \frac{x-1}{2}, 1, u_1, v_1 \rangle \in W_{z_2}$, und folglich $(\frac{x-1}{2}, 0), (\frac{x-1}{2}, 1) \in \mathcal{G}_{z_2}^C$ - im Widerspruch zur Rechtseindeutigkeit von $\mathcal{G}_{z_2}^C$.

Wir zeigen: $\mathcal{G}_{z_3}^C = c_{\text{AjungB}}$.

" $\subset$ ": Sei $(x, y) \in \mathcal{G}_{z_3}^C$. Dann gibt es u, v , so daß $\langle x, y, u, v \rangle \in W_{z_3}$ mit $D_u \subset C$ und $D_v \subset \bar{C}$. Ist x gerade, so folgt $\langle \frac{x}{2}, y, u, v \rangle \in W_{z_1}$ mit $D_u \subset C$ und $D_v \subset \bar{C}$, also $(\frac{x}{2}, y) \in \mathcal{G}_{z_1}^C = c_A$, und damit $(x, y) \in c_{\text{AjungB}}$. Für ungerades x hingegen gilt $\langle \frac{x-1}{2}, y, u, v \rangle \in W_{z_2}$ mit $D_u \subset C$ und $D_v \subset \bar{C}$, also $(\frac{x-1}{2}, y) \in \mathcal{G}_{z_2}^C = c_B$, und damit $(x, y) \in c_{\text{AjungB}}$.

" $\supset$ ": $(x, 1) \in c_{\text{AjungB}} \Rightarrow x \in \text{AjungB} \Rightarrow (x \text{ gerade} \ \& \ \frac{x}{2} \in A) \text{ oder } (x \text{ ungerade} \ \& \ \frac{x-1}{2} \in B) \Rightarrow (x \text{ gerade} \ \& \ (\frac{x}{2}, 1) \in \mathcal{G}_{z_1}^C) \text{ oder } (x \text{ ungerade} \ \& \ (\frac{x-1}{2}, 1) \in \mathcal{G}_{z_2}^C) \Rightarrow (x \text{ gerade} \ \& \ \exists u, v [\langle \frac{x}{2}, 1, u, v \rangle \in W_{z_1} \ \& \ D_u \subset C \ \& \ D_v \subset \bar{C}]) \text{ oder } (x \text{ ungerade} \ \& \ \exists u, v [\langle \frac{x-1}{2}, 1, u, v \rangle \in W_{z_2} \ \& \ D_u \subset C \ \& \ D_v \subset \bar{C}]) \Rightarrow \exists u, v [\langle x, 1, u, v \rangle \in W_{z_3} \ \& \ D_u \subset C \ \& \ D_v \subset \bar{C}] \Rightarrow (x, 1) \in \mathcal{G}_{z_3}^C$. Analog für $(x, 0)$!

Das heißt $\text{AjungB} \leq_T C$ via z_3 . Q.e.d.

- Satz 2:** (a) Jeder T-Grad enthält genau abzählbar unendlich viele Elemente.
 (b) Jeder T-Grad hat höchstens abzählbar unendlich viele T-Grade unter sich in der T-Reduzierbarkeitsordnung.

Beweis: (a) Sei für beliebiges A die Menge B aus $d_T(A)$. Definiere $2B := \{2x \mid x \in B\}$ und $B_n := 2B \cup \{1, \dots, 2n+1\}$ für alle n . Dann ist die Folge der B_n abzählbar unendlich mit $B_1 \neq B_j$ für $i \neq j$, wobei $B \equiv_T B_n$, d.h. $B_n \in d_T(A)$ für alle n . Denn für alle x gilt: $x \in B \Leftrightarrow 2x \in B_n$, also $B \leq_m B_n$; und: $x \in B_n \Leftrightarrow \frac{x}{2} \in B$, wenn x gerade, und $x \in \{1, \dots, 2n+1\}$, wenn x ungerade.

- (b) Für jeden T-Grad $d_T(B)$ unterhalb von $d_T(A)$ gilt $B \leq_T A$, d.h. c_B ist eine A -rekursive Funktion. Da es für jedes A nur abzählbar viele A -rekursive Funktionen gibt, kann es auch nur abzählbar viele solcher $d_T(B)$ unter $d_T(A)$ geben.

Satz 3: Für jede Menge B bildet $\mathcal{L}_T(B) = \{A \mid A \leq_T B\}$ eine Boolesche Algebra.

Beweis: (i) $\emptyset, B \in \mathcal{L}_T(B)$ klar, da rekursiv.

(ii) Sei $A \in \mathcal{L}_T(B)$. Dann gilt, da $\bar{A} \equiv_T A$, auch $\bar{A} \in \mathcal{L}_T(B)$.

(iii) Seien $A_1, A_2 \in \mathcal{L}_T(B)$. Zu zeigen: $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{L}_T(B)$.

Da $A_1 \leq_T B$ und $A_2 \leq_T B$, gilt nach Satz 1 $A_1 \text{ jung } A_2 \leq_T B$.

Da $A_1 \leq_{tt} A_1 \text{ jung } A_2$ und $A_2 \leq_{tt} A_1 \text{ jung } A_2$, gilt nach §4.2, Satz 7,

daß $A_1 \cap A_2 \leq_{tt} A_1 \text{ jung } A_2$. Dann folgt $A_1 \cap A_2 \leq_T B$.

(iv) Für $A_1, A_2 \in \mathcal{L}_T(B)$ folgt $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{L}_T(B)$ analog (iii).

Satz 4: Jeder T-Grad hat eine unendliche Folge von T-Graden über sich, die in bezug auf $\leq_T$ - mit dem Ordnungstyp der natürlichen Zahlen - linear geordnet sind.

Beweis: Sei $A \in d_T(B)$ für beliebiges B. Definiere induktiv: $B_1 = K^A$, und $B_{n+1} = K^{B_n}$ für alle $n \geq 1$ (i.e. die Folge $K^A, K^{(K^A)}, K^{(K^{(K^A)})}, \dots$).

Dann gilt nach dem Beweis von Satz 1 aus §8.1 $B_1 \not\leq_T A$ und $B_{n+1} \not\leq_T B_n$ für alle $n \geq 1$, jedoch $A \leq_T B_1 \leq_T \dots \leq_T B_n \leq_T B_{n+1} \leq_T \dots$.

Mithin: $d_T(B) <_T d_T(B_1) <_T \dots <_T d_T(B_n) <_T d_T(B_{n+1}) <_T \dots$.

Satz 5: Sei d ein T-Grad. Dann gilt: d besitzt einen maximalen 1-Grad $\iff$
 $\iff$ d besitzt einen maximalen m-Grad $\iff$ d besitzt einen maximalen tt-Grad.

Beweis: Es gilt: d besitzt einen maximalen 1-Grad $d_1(A) \implies d_m(A)$ ist maximaler m-Grad in d (denn: $B \in d \implies B \leq_1 A \implies B \leq_m A \implies d_{tt}(A)$ ist maximaler tt-Grad in d (denn: $B \in d \implies B \leq_m A \implies B \leq_{tt} A \implies d_1(A^{tt})$ ist maximaler 1-Grad in d (denn: $B \in d \implies B \leq_{tt} A \equiv_{tt} A^{tt} \implies B \leq_{tt} A^{tt} \implies B \leq_1 A^{tt}$)).

Satz 6: Zu jedem rekursiv aufzählbaren T-Grad d gibt es eine rekursive Menge A derart, daß $K \cap A$ in d ist.

Beweis: Sei d rekursiv aufzählbar, $B = W_{x_0}$ aus d. Nach §3.2, Korollar zu Satz 2 (S.65), gilt $K_0 \equiv K$. Sei f eine rekursive Permutation mit $f(K_0) = K$. Definiere $A = f(\{\langle x, y \rangle \mid y \in \mathbb{N}\})$. Dann ist A rekursiv, und $K \cap A \in d$, da $K \cap A \equiv_T B$. Denn es gilt für alle x: $x \in K \cap A \iff x \in A \ \& \ x \in K \iff$
 $\iff f^{-1}(x) = \langle x_0, y \rangle$ mit $y \in \mathbb{N} \ \& \ x \in K \iff \pi_1(f^{-1}(x)) = x_0 \ \& \ \pi_2(f^{-1}(x)) \in W_{x_0} = B$, und Letzteres ist relativ zu B entscheidbar (intuitives Argument); also $K \cap A \leq_T B$. Sowie: $x \in B = W_{x_0} \iff \langle x_0, x \rangle \in K_0 \iff f(\langle x_0, x \rangle) \in K \cap A \iff$
 $\iff h(x) \in K \cap A$. Definiere $g(x) = \langle x_0, x \rangle$ für alle x. Dann ist $h = f \circ g$ rekursiv und injektiv; und $B \leq_1 K \cap A \text{ via } h$.

Satz 7: Sei A gegeben mit $K \leq_T A$. Sei $B := A \text{ jung } \bar{A}$ und $C := \{x \mid \mathcal{G}_x(x) \text{ definiert} \ \& \ \mathcal{G}_x(x) \notin B\}$. Dann gilt: (i) $A \leq_1 C$; (ii) $C \leq_T A$; und (iii) $C \not\leq_1 A$.

Beweis: Seien A, B, C wie im Satz gegeben

(i) Zu zeigen: es gibt eine rekursive und injektive Funktion f derart, daß für alle x gilt: $x \in A \iff f(x) \in C \iff \mathcal{G}_{f(x)}(f(x))$ definiert & $\mathcal{G}_{f(x)}(f(x)) \nmid B = A \text{ Jung } \bar{A}$.

Sei x beliebig. Definiere für alle y $\psi(x, y) := 2x+1$. Dann ist ψ offenbar eine rekursive Funktion, und nach dem s-m-n-Theorem existiert ein rekursives f, so daß $\mathcal{G}_{f(x)}(y) = 2x+1$ für alle x, y. Aus $x_1 \nmid x_2$ folgt $\mathcal{G}_{f(x_1)}(y) = 2x_1+1 \nmid 2x_2+1 = \mathcal{G}_{f(x_2)}(y)$ für alle y, d.h. $\mathcal{G}_{f(x_1)} \nmid \mathcal{G}_{f(x_2)}$, und damit $f(x_1) \nmid f(x_2)$; also ist f injektiv. - Für alle x folgt: $x \in A \iff x \nmid \bar{A} \iff 2x+1 \nmid A \text{ Jung } \bar{A} \iff \mathcal{G}_{f(x)}(y) \nmid A \text{ Jung } \bar{A}$ für alle y $\iff \iff \mathcal{G}_{f(x)}(f(x))$ definiert & $\mathcal{G}_{f(x)}(f(x)) \nmid A \text{ Jung } \bar{A} = B \iff f(x) \in C$.
I.e. $A \leqslant_1 C$ via f.

(ii) Intuitiv gesprochen, bedeutet $C \leqslant_T A$, daß für beliebiges x relativ zu A entschieden werden kann, ob $x \in C$. Dabei gilt: $x \in C \iff \mathcal{G}_x(x)$ definiert & $\mathcal{G}_x(x) \nmid B \iff (\mathcal{G}_x(x)$ definiert und gerade & $\frac{1}{2}\mathcal{G}_x(x) \nmid A)$ oder $(\mathcal{G}_x(x)$ definiert und ungerade & $\frac{1}{2}(\mathcal{G}_x(x)-1) \nmid \bar{A})$. Nun läßt sich aufgrund $K \leqslant_T A$ nach Voraussetzung relativ zu A entscheiden, ob $\mathcal{G}_x(x)$ definiert. Ist dies nicht der Fall, so $x \nmid C$. Wenn ja, so prüfe, ob $\mathcal{G}_x(x)$ gerade und $\frac{1}{2}\mathcal{G}_x(x) \in A$, bzw. ob $\mathcal{G}_x(x)$ ungerade und $\frac{1}{2}(\mathcal{G}_x(x)-1) \nmid A$. Ist eines von beidem der Fall, dann $x \nmid C$; wenn nicht, so $x \in C$.

Formal verläuft der Beweis über unsere Charakterisierung $\leqslant_w$ von $\leqslant_T$ wie folgt. Da nach Voraussetzung $K \leqslant_w A$, gibt es ein z mit $c_K = \mathcal{G}_z^A = \{(x, y) \mid \exists u, v [\langle x, y, u, v \rangle \in W_z \text{ und } D_u \subset A \text{ und } D_v \subset \bar{A}]\}$. (Insbesondere gilt: $\mathcal{G}_x(x)$ undefiniert $\iff \exists u, v [\langle x, 0, u, v \rangle \in W_z \text{ und } D_u \subset A \text{ und } D_v \subset \bar{A}]$.) Gesucht ist ein z_0 mit $c_C = \mathcal{G}_{z_0}^A = \{(x, y) \mid \exists u, v [\langle x, y, u, v \rangle \in W_{z_0} \text{ und } D_u \subset A \text{ und } D_v \subset \bar{A}]\}$.

Nun gilt zum einen für alle x: $(x, 1) \in c_C \iff x \in C \iff \mathcal{G}_x(x)$ definiert & $\mathcal{G}_x(x) \nmid A \text{ Jung } \bar{A} \iff (\mathcal{G}_x(x)$ definiert und gerade & $\frac{1}{2}\mathcal{G}_x(x) \nmid A)$ oder $(\mathcal{G}_x(x)$ definiert und ungerade & $\frac{1}{2}(\mathcal{G}_x(x)-1) \in A)$. Definiere daher die Menge $B_0 := \{ \langle x, 1, 0, 2\mathcal{G}_x(x) \rangle \mid x \in K \text{ und } \mathcal{G}_x(x) \text{ gerade} \} \cup \{ \langle x, 1, 2\mathcal{G}_x(x)-1, 0 \rangle \mid x \in K \text{ und } \mathcal{G}_x(x) \text{ ungerade} \}$.

Zum andern gilt: $(x, 0) \in c_C \iff x \nmid C \iff \mathcal{G}_x(x)$ undefiniert oder $(\mathcal{G}_x(x)$ definiert & $\mathcal{G}_x(x) \in A \text{ Jung } \bar{A}) \iff \mathcal{G}_x(x)$ undefiniert oder $(\mathcal{G}_x(x)$ definiert und gerade & $\frac{1}{2}\mathcal{G}_x(x) \in A)$ oder $(\mathcal{G}_x(x)$ definiert und ungerade & $\frac{1}{2}(\mathcal{G}_x(x)-1) \in \bar{A})$. Definiere daher $B_1 := \{ \langle x, 0, u, v \rangle \mid \langle x, 0, u, v \rangle \in W_z \} \cup \{ \langle x, 0, 2\mathcal{G}_x(x), 0 \rangle \mid x \in K \text{ und } \mathcal{G}_x(x) \text{ gerade} \} \cup \{ \langle x, 0, 0, 2\mathcal{G}_x(x)-1 \rangle \mid x \in K \text{ und } \mathcal{G}_x(x) \text{ ungerade} \}$. Dann sei $B := B_0 \cup B_1$. Wegen der rekursiven Aufzählbarkeit von K und W_z ist offenbar auch B rekursiv aufzählbar. Sei nun $B = W_{z_0}$. Wir zeigen, daß $c_C = \mathcal{G}_{z_0}^A$.

(1) $(x,1) \in c_C \iff (\text{s.o.}) \quad (\mathcal{G}_x(x) \text{ definiert und gerade} \ \& \ \frac{1}{2}\mathcal{G}_x(x) \notin A) \text{ oder}$
 $(\mathcal{G}_x(x) \text{ definiert und ungerade} \ \& \ \frac{1}{2}(\mathcal{G}_x(x)-1) \in A) \iff (\langle x,1,0,2\frac{1}{2}\mathcal{G}_x(x) \rangle \in B_0 \ \& \ \frac{1}{2}\mathcal{G}_x(x) \notin A) \text{ oder}$
 $(\langle x,1,0,2\frac{1}{2}(\mathcal{G}_x(x)-1) \rangle \in A \ \& \ \frac{1}{2}(\mathcal{G}_x(x)-1) \in A) \iff$
 $\iff \exists u,v [\langle x,1,u,v \rangle \in B = W_{z_0} \ \& \ D_u \subset A \ \& \ D_v \subset \bar{A}] \iff (x,1) \in \mathcal{G}_{z_0}^A.$

(2) $(x,0) \in c_C \iff (\text{s.o.}) \quad \mathcal{G}_x(x) \text{ undefiniert oder } (\mathcal{G}_x(x) \text{ definiert und}$
 $\text{gerade} \ \& \ \frac{1}{2}\mathcal{G}_x(x) \in A) \text{ oder } (\mathcal{G}_x(x) \text{ definiert und ungerade} \ \& \ \frac{1}{2}(\mathcal{G}_x(x)-1) \in \bar{A})$
 $\iff (\langle x,0,u,v \rangle \in B_1 \text{ mit } \langle x,0,u,v \rangle \in W_u) \text{ oder } (\langle x,0,2\frac{1}{2}\mathcal{G}_x(x),0 \rangle \in B_1 \text{ mit}$
 $\frac{1}{2}\mathcal{G}_x(x) \in A) \text{ oder } (\langle x,0,0,2\frac{1}{2}(\mathcal{G}_x(x)-1) \rangle \in B_1 \text{ mit } \frac{1}{2}(\mathcal{G}_x(x)-1) \in \bar{A}) \iff$
 $\iff \exists u,v [\langle x,0,u,v \rangle \in B = W_{z_0} \ \& \ D_u \subset A \ \& \ D_v \subset \bar{A}] \iff (x,0) \in \mathcal{G}_{z_0}^A.$

Also: $C \leq_w A$ via z_0 .

(iii) Indirekt. Angenommen, $C \leq_1 A$ via f' . Dann folgt $C \leq_1 B$ via $f := f' \circ f'$ mit $f'(x) = 2x$; denn: $x \in C \iff f'(x) \in A \iff 2f'(x) \in B \iff f'(f'(x)) = f(x) \in B$. Sei $f = \mathcal{G}_z$ für geeignetes z . Dann gilt nach Definition von C : $z \in C \iff \mathcal{G}_z(z) \notin B$; andererseits wegen $C \leq_1 B$ via $\mathcal{G}_z$: $z \in C \iff \mathcal{G}_z(z) \in B$ - Widerspruch! Also $C \not\leq_1 A$. Q.e.d.

Satz 7 zeigt, daß es in jedem Grad $d_T(A)$ oberhalb von $d_T(K)$ ein Element gibt, das nicht in demselben 1-Grad wie A liegt. - Der folgende Satz bringt eine zu unserer syntaktischen Definition von $\leq_T$ über rekursiv aufzählbare Mengen analog gebildete Charakterisierung der tt-Reduzierbarkeit über endliche Mengen. Deren rekursive kanonische Indizes erscheinen in Satz 9 als rekursiv aufzählbare für $\leq_T$. Satz 10 schließlich charakterisiert die T-Reduzierbarkeit über das Komplement der zu reduzierenden Menge.

Satz 8: $A \leq_{tt} B \iff$ Es gibt rekursive Funktionen f und g derart, daß für alle x gilt: $[x \in A \iff \exists u \exists v [\langle u,v \rangle \in D_f(x) \ \& \ D_u \subset B \ \& \ D_v \subset \bar{B}]]$ & $[x \notin A \iff \exists u \exists v [\langle u,v \rangle \in D_g(x) \ \& \ D_u \subset B \ \& \ D_v \subset \bar{B}]]$.

Beweis: " $\implies$ ": Gelte $A \leq_{tt} B$ via h ; d.h. für alle x : $x \in A \iff h(x) =$

$= ((x_1, \dots, x_k), \alpha)$ von B erfüllt $\iff \alpha(c_B(x_1), \dots, c_B(x_k)) = 1$.

Sei x beliebig mit $h(x) = ((x_1, \dots, x_k), \alpha)$. Betrachte die Mengen

$D := \{ \langle u,v \rangle \mid D_u \cup D_v = \{x_1, \dots, x_k\} \ \& \ D_u \cap D_v = \emptyset \ \& \ \exists (y_1, \dots, y_k) \in \{0,1\}^k$
 $[\alpha(y_1, \dots, y_k) = 1 \text{ (i.e. } (y_1, \dots, y_k) \in 1_\alpha) \ \& \ D_u = \{x_i \mid 1 \leq i \leq k \ \& \ y_i = 1\} \ \& \ D_v = \{x_j \mid 1 \leq j \leq k \ \& \ y_j = 0\}] \}$ und

$D' := \{ \langle u,v \rangle \mid D_u \cup D_v = \{x_1, \dots, x_k\} \ \& \ D_u \cap D_v = \emptyset \ \& \ \exists (y_1, \dots, y_k) \in \{0,1\}^k$
 $[\alpha(y_1, \dots, y_k) = 0 \text{ (i.e. } (y_1, \dots, y_k) \in 0_\alpha) \ \& \ D_u = \{x_i \mid 1 \leq i \leq k \ \& \ y_i = 1\} \ \& \ D_v = \{x_j \mid 1 \leq j \leq k \ \& \ y_j = 0\}] \}.$

Sei $f(x) =$ der kanonische Index von D , und $g(x) =$ der kanonische Index von D' . Dann sind, da D und D' offenbar effektiv zu ermittelnde endliche Mengen sind, f und g wohldefinierte rekursive Funktionen, und es gilt für alle x :

(i) " $\Rightarrow$ ": $x \in A \Rightarrow h(x) = ((x_1, \dots, x_k), \alpha)$ von B erfüllt $\Rightarrow$
 $\Rightarrow (c_B(x_1), \dots, c_B(x_k)) \in 1_\alpha \Rightarrow$ für $\langle u, v \rangle$ mit $D_u := \{x_1 \mid c_B(x_1)=1\}$ und $D_v := \{x_j \mid c_B(x_j)=0\}$ gilt $\langle u, v \rangle \in D_{f(x)}$ mit $D_u \subset B$ und $D_v \subset \bar{B}$.

" $\Leftarrow$ ": Sei $\langle u, v \rangle \in D_{f(x)}$ mit $D_u \subset B$ und $D_v \subset \bar{B}$. Nach Definition von f gilt $D_u \cup D_v = \{x_1, \dots, x_k\}$ (wobei $((x_1, \dots, x_k), \alpha) = h(x)$) & $D_u \cap D_v = \emptyset$ & $\exists (y_1, \dots, y_k) \in 1_\alpha [D_u = \{x_1 \mid 1 \leq i \leq k \text{ \& } y_1=1\} \subset B$ & $D_v = \{x_j \mid 1 \leq j \leq k \text{ \& } y_j=0\} \subset \bar{B}]$. Also $c_B(x_1) = 1 \Leftrightarrow y_1 = 1$ für $1 \leq i \leq k$, d.h. $(c_B(x_1), \dots, c_B(x_k)) = (y_1, \dots, y_k) \in 1_\alpha$; damit $\alpha(c_B(x_1), \dots, c_B(x_k)) = 1$, d.h. $((x_1, \dots, x_k), \alpha) = h(x)$ von B erfüllt, und folglich $x \in A$.

(ii) " $\Rightarrow$ ": $x \notin A \Rightarrow h(x) = ((x_1, \dots, x_k), \alpha)$ nicht von B erfüllt $\Rightarrow$
 $\Rightarrow (c_B(x_1), \dots, c_B(x_k)) \in 0_\alpha \Rightarrow$ für $\langle u, v \rangle$ mit D_u, D_v wie oben gilt $\langle u, v \rangle \in D_{g(x)}$ mit $D_u \subset B$ und $D_v \subset \bar{B}$.

" $\Leftarrow$ ": Sei $\langle u, v \rangle \in D_{g(x)}$ mit $D_u \subset B$ und $D_v \subset \bar{B}$, D_u, D_v analog oben, jedoch für $(y_1, \dots, y_k) \in 0_\alpha$. Wegen $y_1 = c_B(x_1)$ für $1 \leq i \leq n$ gilt dann $\alpha(c_B(x_1), \dots, c_B(x_k)) = 0$, also $h(x) = ((x_1, \dots, x_k), \alpha)$ nicht von B erfüllt, weswegen $x \notin A$.

" $\Leftarrow$ ": Seien f und g rekursive Funktionen derart, daß für alle x gilt:
 $x \in A \Leftrightarrow \exists u \exists v [\langle u, v \rangle \in D_{f(x)} \text{ \& } D_u \subset B \text{ \& } D_v \subset \bar{B}]$; sowie: $x \notin A \Leftrightarrow \exists u \exists v [\langle u, v \rangle \in D_{g(x)} \text{ \& } D_u \subset B \text{ \& } D_v \subset \bar{B}]$. Gelte für gegebenes x

$$\{x_1, \dots, x_n\} := \langle u, v \rangle \bigcup_{f(x)} (D_u \cup D_v)$$

(mit paarweise verschiedenen x_1).

Definiere für $(y_1, \dots, y_n) \in \{0, 1\}^n$

$$\alpha(y_1, \dots, y_n) = 1 \Leftrightarrow \exists \langle u, v \rangle \in D_{f(x)} \forall i=1, \dots, n [(x_i \in D_u \Rightarrow y_i=1) \text{ \& } (x_i \in D_v \Rightarrow y_i=0) \text{ \& } D_u \cap D_v = \emptyset] . \text{ Sodann } h(x) := ((x_1, \dots, x_n), \alpha). \text{ Dann folgt für alle } x: x \in A \Leftrightarrow \exists u \exists v [\langle u, v \rangle \in D_{f(x)} \text{ \& } D_u \subset B \text{ \& } D_v \subset \bar{B}] \Leftrightarrow \exists \langle u, v \rangle \in D_{f(x)} \forall i=1, \dots, n [(x_i \in D_u \Rightarrow x_i \in B \Rightarrow c_B(x_i)=1) \text{ \& } (x_i \in D_v \Rightarrow x_i \notin B \Rightarrow c_B(x_i)=0) \text{ \& } D_u \cap D_v = \emptyset] \Leftrightarrow \alpha(c_B(x_1), \dots, c_B(x_n)) = 1 \Leftrightarrow h(x) \text{ von B erfüllt.}$$

Das heißt $A \leq_{tt} B$ via h.

Q.e.d.

Satz 9: $A \leq_T B \Leftrightarrow$ Es gibt rekursive Funktionen f und g derart, daß für alle x gilt: $x \in A \Leftrightarrow \exists u \exists v [\langle u, v \rangle \in W_{f(x)} \text{ \& } D_u \subset B \text{ \& } D_v \subset \bar{B}]$; und: $x \notin A \Leftrightarrow \exists u \exists v [\langle u, v \rangle \in W_{g(x)} \text{ \& } D_u \subset B \text{ \& } D_v \subset \bar{B}]$.

Beweis: " $\Leftarrow$ ": Sei x beliebig. Um (relativ zu B) zu entscheiden, ob $x \in A$, zähle parallel $W_{f(x)}, W_{g(x)}$ auf, bis ein $\langle u, v \rangle$ mit $D_u \subset B$ und $D_v \subset \bar{B}$ auftritt. Da entweder $x \in A$ oder $x \notin A$, ist dies nach endlich vielen Untersuchungen der Fall. Ist $\langle u, v \rangle \in W_{f(x)}$, so $x \in A$; falls $\langle u, v \rangle \in W_{g(x)}$, so $x \notin A$.

" $\Rightarrow$ ": Sei z so, daß $c_A = g_z^\beta = \{ \langle x, y \rangle \mid \exists u, v [\langle x, y, u, v \rangle \in W_z \text{ \& } D_u \subset B \text{ \& } D_v \subset \bar{B}] \}$. Definiere $W_{f(x)} = \{ \langle u, v \rangle \mid \langle x, 1, u, v \rangle \in W_z \}$ und $W_{g(x)} := \{ \langle u, v \rangle \mid \langle x, 0, u, v \rangle \in W_z \}$. Dann gilt für alle x: $x \in A \Leftrightarrow (x, 1) \in g_z^\beta \Leftrightarrow$

$$\begin{aligned} \exists u, v [\langle x, 1, u, v \rangle \in W_z & \& D_u \subset B \& D_v \subset \bar{B}] \Leftrightarrow \exists u \exists v [\langle x, 1, u, v \rangle \in W_z & D_u \subset B & \\ & \& D_v \subset \bar{B}] \Leftrightarrow \exists u \exists v [\langle u, v \rangle \in W_{f(z)} & D_u \subset B & D_v \subset \bar{B}]; \text{ sowie: } x \in A \Leftrightarrow (x, 0) \in \\ \in \mathcal{G}_z^B \Leftrightarrow \exists u, v [\langle x, 0, u, v \rangle \in W_z & D_u \subset B & D_v \subset \bar{B}] \Leftrightarrow \exists u \exists v [\langle u, v \rangle \in W_{g(z)} & \\ & \& D_u \subset B & D_v \subset \bar{B}]. \text{ Q.e.d.} \end{aligned}$$

Satz 10: Seien A und B rekursiv aufzählbar. Dann sind äquivalent:

$$(i) \quad A \leq_T B;$$

$$(ii) \quad \exists x [\bar{A} = W_x^B];$$

(iii) es gibt eine rekursive Funktion f derart, daß für alle x gilt:

$$x \in \bar{A} \Leftrightarrow \exists y [y \in W_{f(x)} \& D_y \subset \bar{B}].$$

Beweis:

"(i) $\Rightarrow$ (ii)": Gelte $A \leq_T B$, d.h. A ist rekursiv in B. Dann ist sowohl A als auch $\bar{A}$ rekursiv aufzählbar in B (vgl. §8.1), d.h. es existiert ein x mit $\bar{A} = W_x^B$ (ibid.).

"(ii) $\Rightarrow$ (iii)": Sei x derart, daß $\bar{A} = W_x^B = \text{dom } \mathcal{G}_x^B = \{ y \mid \exists z, u, v [\langle y, z, u, v \rangle \in W_x \& D_u \subset B \& D_v \subset \bar{B}] \}$. Sei $B = \text{range } g$ mit rekursivem g. Dann gibt es ein rekursives f mit

$$\begin{aligned} W_{f(y)} &:= \{ v \mid \exists z, u, w [\langle y, z, u, v \rangle \in W_x \& D_v \subset \text{range}(g \upharpoonright w)] \} = \\ &= \{ v \mid \exists z, u [\langle y, z, u, v \rangle \in W_x \& D_v \subset B] \}. \end{aligned}$$

Dann gilt: $y \notin A \Leftrightarrow y \in \bar{A} \Leftrightarrow \exists z, u, v [\langle y, z, u, v \rangle \in W_x \& D_u \subset B \& D_v \subset \bar{B}] \Leftrightarrow \exists v [\exists z, u [\langle y, z, u, v \rangle \in W_x \& D_u \subset B] \& D_v \subset \bar{B}] \Leftrightarrow \exists v [v \in W_{f(y)} \& D_v \subset \bar{B}]$.

"(iii) $\Rightarrow$ (i)": Aus (iii) erhält man eine Aufzählung von $\bar{A}$, die relativ zu B rekursiv ist. (Zähle dazu $W_{f(x)} := \{ y_0, y_1, y_2, \dots \}$ auf und prüfe, für jedes y_1 , ob $D_{y_1} \subset \bar{B}$. Ist dies der Fall, nehme y_1 in die Liste für $\bar{A}$.) Andererseits ist A rekursiv aufzählbar. Daher sind, um $x \in A$ (relativ B) zu entscheiden, einfach beide Aufzählungen parallel durchzuführen. Q.e.d.

§8.3 Hyperschlichte Mengen; der Satz von Dekker

Mithilfe sog. schlichter Mengen bemerkten wir in §3.4, Satz 2 (S.79), daß nicht jede nicht-rekursive rekursiv aufzählbare Menge m -vollständig - bzw., gleichbedeutend damit, 1-vollständig - ist. Die schlichte Menge S^* aus §4.3, Satz 1 (S.102f.) war ein Beispiel einer (nicht-rekursiven rekursiv aufzählbaren) Menge, welche - vgl. §5.2, Korollar zu Satz 1 (S.116) - nicht tt -vollständig ist. In §8.4 wollen wir zeigen, daß es nicht-rekursive rekursiv aufzählbare Mengen gibt, die nicht tt -vollständig sind. Als Korollar ergibt sich die Existenz T -vollständiger Mengen, welche nicht tt -vollständig sind - mit der daraus resultierenden Divergenz von $\leq_T$ und $\leq_{tt}$ auf den rekursiv aufzählbaren Mengen. Wieder war es Post, der - durch die Untersuchung sog. *hyper-schlichter* Mengen - dies Ergebnis erzielte. Von seiner Konstruktion der tt -vollständigen Menge S^* her schien es Post naheliegend, nach einer Menge zu suchen, welche der folgenden Definition genügte: "A hyper-simple set H is a recursively enumerable set of positive integers whose complement $\bar{H}$ is infinite, while there is no infinite recursively enumerable set of mutually exclusive finite sequences of positive integers such that each sequence has at least one member thereof in $\bar{H}$... Mutually exclusive sequences here mean no element of one sequence is an element of another" ("Eine hyper-schlichte Menge H ist eine rekursiv aufzählbare Menge positiver ganzer Zahlen, deren Komplement $\bar{H}$ unendlich ist, während es keine unendliche rekursiv aufzählbare Menge sich paarweise ausschließender endlicher Folgen positiver ganzer Zahlen gibt derart, daß von jeder Folge mindestens ein Glied in $\bar{H}$ liegt... Mit sich gegenseitig ausschließenden Folgen meinen wir hier solche der Art, daß kein Element der einen Folge auch Element einer anderen ist") (Post(1944), a.a.O. S.305). Wir bringen - mit Rogers(1967) - eine modifizierte Definition, welche sich (vgl. Satz 2) mit der Posts als äquivalent erweist. Auch was die Existenz hyperschlichter Mengen betrifft, folgen wir nicht Posts ursprünglichem Beweis, sondern dem allgemeineren in Dekker(1954).

Sei dazu A eine unendliche Menge, f eine rekursive Funktion. Wir sagen, daß f A *majorisiert*, wenn für alle n $f(n) \geq z_n$ gilt, wobei $z_0, z_1, z_2, \dots$ die Elemente von A in streng wachsender (i.a. nicht effektiv!) Folge seien. Dann läßt sich leicht durch Diagonalisierung zeigen, daß es Mengen gibt, welche von keiner rekursiven Funktion majorisiert werden. Sei nämlich $f_0, f_1, f_2, \dots$ eine Folge von Funktionen, die alle rekursiven Funktionen enthält. Definiere die (i.a. nicht rekursive) Funktion g durch Induktion wie folgt: $g(0) = f_0(0)+1$;

$$g(1) = \mu z \left[z > g(0) \ \& \ z > f_1(1) \right];$$

$$g(2) = \mu z \left[z > g(1) \ \& \ z > f_2(2) \right];$$

⋮

- allgemein: $g(n+1) := \mu z [z > g(n) \ \& \ z > f_{n+1}(n+1)]$.

Dann wird $A := \text{range } g$ von keiner rekursiven Funktion majorisiert. Denn angenommen, $f = f_1$ majorisiert A ; d.h. für alle n gilt $f_1(n) \geq g(n)$ (- da g offenbar streng monoton wachsend ist, sind $g(0), g(1), g(2), \dots$ die Elemente von $\text{range } g = A$ in streng wachsender Folge), also insbesondere $f_1(1) \geq g(1) = \mu z [z > g(1-1) \ \& \ z > f_1(1)]$, i.e. $g(1) > f_1(1)$ - Widerspruch (für $i > 0$; für $i = 0$ ergibt sich $f_0(0) \geq g(0) = f_0(0)+1$ - Widerspruch!)! Wir nennen solche Mengen *hyperfrei* (engl. "hyperimmune"), um über sie sodann hyperschlichte Mengen zu definieren - analog unserer Definition schlichter Mengen vermöge freier (vgl. §3.4, S.78).

Definition: (a) A heißt hyperfrei, wenn

- (i) A unendlich;
- (ii) $\forall f$ rekursiv $[f$ majorisiert A nicht].

(b) A heißt hyperschlicht, wenn

- (i) A rekursiv aufzählbar;
- (ii) $\bar{A}$ hyperfrei.

Satz 1: (a) A hyperfrei $\implies A$ frei.

(b) A hyperschlicht $\implies A$ schlicht.

Beweis: (a) Sei A hyperfrei. Dann ist A nach Definition unendlich. Bleibt zu zeigen, daß A keine unendliche rekursiv aufzählbare Teilmenge enthält. Angenommen, A enthält eine unendliche rekursiv aufzählbare Menge B , $B = \text{range } f$ für ein geeignetes rekursives f . Definiere die Funktion g induktiv durch:

$$g(0) := f(0);$$

$$g(n+1) := f(\mu z [f(z) > g(n)]).$$

Dann ist g offenbar rekursiv. Wir zeigen, daß g A majorisiert. Seien nämlich $z_0, z_1, z_2, \dots$ die Elemente von A in streng wachsender Folge. Durch Induktion sieht man, daß $g(n) \geq z_n$ für alle n gilt:

$n = 0$: $g(0) = f(0) \geq z_0$, da z_0 das kleinste Element von A ist.

$n \rightarrow n+1$: Gelte $g(n) \geq z_n$. Dann folgt $g(n+1) = f(\mu z [f(z) > g(n)]) > g(n) \geq z_n$, also $g(n+1) > z_n$. Da $g(n+1) \in A$, und $z_0, z_1, z_2, \dots$ die Elemente von A in wachsender Ordnung sind, muß $g(n+1)$ mindestens so groß sein wie das zu z_n nächstgrößere Element von A , d.h. $g(n+1) \geq z_{n+1}$.

Da dies ein Widerspruch ist, folgt die Behauptung.

(b) Sei A hyperschlicht. Dann ist (i) A per definitionem rekursiv aufzählbar, und (ii) $\bar{A}$ hyperfrei, also nach (a) frei; somit A schlicht.

Während demzufolge jede hyperschlichte Menge insbesondere schlicht ist, bildet, wie bereits Post bemerkt, die Menge S aus §3.4, Satz 1 - nach (ii) des dazugehörigen Beweises (S.78) - ein Beispiel einer schlichten, nicht hingegen hyperschlichten Menge, da S von der rekursiven Funktion $\lambda x[2x]$

majorisiert wird. - "Hypersimple sets thus constitute a third class of recursively enumerable sets with recursively unsolvable decision problems - a class which is a proper subclass of the class of simple sets" ("Hyperschlichte Mengen bilden somit eine dritte Klasse von rekursiv aufzählbaren Mengen mit rekursiv unlösbarem Entscheidungsproblem - eine Klasse, welche eine echte Teilklasse der Klasse der schlichten Mengen ist") (Post(1944), a.a.O. S. 108). - Bevor wir - nach Dekker - die Existenz hyperschlichter Mengen beweisen, zeigen wir, daß ihre ursprüngliche Charakterisierung durch Post (s.o.) mit der unsrigen äquivalent ist. Ersetzt man Posts Formulierung mit den "sich paarweise ausschließenden endlichen Folgen" durch "paarweise disjunkte endliche Mengen", so besagt sie, daß eine unendliche Menge genau dann hyperfrei ist, wenn es keine rekursiv aufzählbare unendliche Folge disjunkter endlicher Mengen gibt, von denen jede mit ihr einen nichtleeren Durchschnitt besitzt. Denotieren wir dabei die endlichen Mengen der Folge in gewohnter Weise durch ihre kanonischen Indizes, so erhält diese Aussage die folgende Gestalt.

Satz 2 (Kuznecov, Medvedev, Uspenskij): $A \text{ hyperfrei} \iff A \text{ unendlich} \ \& \ \neg \exists f \text{ rekursiv} \left[\forall u \left[D_{f(u)} \cap A \neq \emptyset \right] \ \& \ \forall u \forall v \left[u \neq v \implies D_{f(u)} \cap D_{f(v)} = \emptyset \right] \right]$.

Beweis: " $\implies$ ": Sei A hyperfrei. Angenommen, es existiert ein f wie auf der rechten Seite der Äquivalenz. Dann gilt $\forall u \left[D_{f(u)} \cap A \neq \emptyset \right]$, also insbesondere $\forall u \left[D_{f(u)} \neq \emptyset \right]$. Definiere für alle y : $g(y) = \max_{i=0}^y D_{f(i)}$. Dann ist, da $\bigcup_{i=0}^y D_{f(i)}$ für alle y endlich - weshalb sich das Maximum immer effektiv ermitteln läßt -, g rekursiv, und es gilt für $z_0, z_1, z_2, \dots$ als die Elemente von A in streng monoton wachsender Ordnung:

$$g(0) = \max D_{f(0)} \geq z_0 \quad (\text{da } D_{f(0)} \cap A \neq \emptyset);$$

$$g(1) = \max(D_{f(0)} \cup D_{f(1)}) \geq z_1 \quad (\text{da zusätzlich } D_{f(1)} \cap A \neq \emptyset, \text{ weswegen } D_{f(0)} \cup D_{f(1)} \text{ mindestens zwei (da } D_{f(0)} \cap D_{f(1)} = \emptyset) \text{ verschiedene Elemente von } A \text{ enthält, deren Maximum dann zumindest so groß ist wie das zweitkleinste Element von } A); \text{ mithin:}$$

$$g(n) = \max(D_{f(0)} \cup \dots \cup D_{f(n)}) \geq z_n, \text{ da } D_{f(0)} \cup \dots \cup D_{f(n)} \text{ aufgrund paarweiser Disjunktheit mindestens } n+1 \text{ Elemente von } A \text{ enthält, und somit deren Maximum mindestens so groß wie das } (n+1)\text{-kleinste Element von } A \text{ sein muß (n bel.).}$$

Also wird A - im Widerspruch zur Voraussetzung - von g majorisiert. Daher kann es kein solches f geben.

" $\impliedby$ ": Indirekt. Angenommen, A nicht hyperfrei. Sei g eine rekursive Funktion, die A majorisiert; d.h. für alle n ist $g(n)$ größer oder gleich dem $(n+1)$ -kleinsten Element von A . Definiere induktiv die Funktion h wie folgt:

$$h(0) := g(0);$$

$$h(n+1) := g(h(n)+1).$$

Dann ist aufgrund der Rekursivität von g auch h rekursiv. Außerdem ist, da g monoton steigend, h streng monoton steigend. – Betrachte nun die Folge der endlichen Mengen

$$\begin{aligned} D^{(0)} &:= \{0, 1, \dots, h(0)\}, \\ D^{(1)} &:= \{h(0)+1, \dots, h(1)\}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

d.h. allgemein: $D^{(n+1)} := \{h(n)+1, \dots, h(n+1)\}$ für alle n .

Da h streng monoton, ist dies eine Folge paarweise disjunkter Abschnitte von $\mathbb{N}$, welche ganz $\mathbb{N}$ ausschöpft. Beachte insbesondere, daß jedes $D^{(n+1)}$ alle außer $h(n)+1$ Zahlen kleiner oder gleich $h(n+1)$, i.e. die Elemente von $D^{(1)} \cup \dots \cup D^{(n)}$, enthält. – Offenbar ist die Folge durch ihre kanonischen Indizes rekursiv aufzählbar; d.h. es existiert eine rekursive Funktion f derart, daß $D^{(u)} = D_{f(u)}$ für alle u . Explizit: $f(0) := 2^0 + 2^1 + \dots + 2^{h(0)}$ und $f(u+1) := 2^{h(u)+1} + \dots + 2^{h(u+1)}$ für alle u . – Als nächstes zeigen wir, daß für alle u gilt: $D_{f(u)} \cap A \neq \emptyset$. Für $u = 0$ hat $D_{f(0)} = D^{(0)}$ den Wert $h(0) = g(0)$ als größtes Element, der nach Voraussetzung über g größer oder gleich dem kleinsten Element von A ist. Da $D^{(0)}$ alle Zahlen kleiner oder gleich $g(0)$ enthält, also u.a. das kleinste Element von A , ist $D_{f(0)} \cap A \neq \emptyset$. Weiter hat für jedes u $D^{(u+1)}$ den Wert $h(u+1) = g(h(u)+1)$ als größtes Element, welches nach Voraussetzung über g größer oder gleich dem $(h(u)+2)$ -kleinsten Element von A ist. Das heißt, daß mindestens $h(u)+2$ Elemente von A kleiner oder gleich $h(u+1)$ sind. Da aber $D^{(u+1)}$ alle außer $h(u)+1$ Zahlen kleiner oder gleich $h(u+1)$ enthält, gilt $D^{(u+1)} \cap A \neq \emptyset$. – Schließlich gilt, wie bereits bemerkt, $D^{(u)} \cap D^{(v)} = \emptyset$ für $u \neq v$; d.h. für alle u, v mit $u \neq v$ ist $D_{f(u)} \cap D_{f(v)} = \emptyset$. – Insgesamt genommen, ist daher die Funktion f von genau der Art, wie sie nach Voraussetzung nicht existiert. Dieser Widerspruch beweist, daß A hyperfrei sein muß. Q.e.d.

Nachdem Post den ersten Beweis für die Existenz hyperschlichter Mengen erbracht hatte, fand Dekker ein allgemeineres und eleganteres Theorem; er zeigte, daß jeder nicht-rekursive rekursiv aufzählbare T-Grad eine hyperschlichte Menge enthält.

Satz 3 (Dekker): A nicht-rekursiv und rekursiv aufzählbar $\implies \implies \exists B [B \equiv_T A \text{ \& \& hyperschlicht}]$.

Beweis: Sei A nicht-rekursiv und rekursiv aufzählbar, $A = \text{range } f$ für ein geeignetes rekursives und injektives f .

Wir nennen die Zahl x minimal bezüglich f , wenn für alle y mit $y > x$ gilt $f(x) < f(y)$. Dann ist $B := \{x \mid x \text{ nicht minimal bezüglich } f\} = \{x \mid \exists y [x < y \text{ \& } f(y) \leq f(x)]\}$. Wir zeigen, daß B die gewünschten Eigenschaften hat. – B ist hyperschlicht; denn es gilt:

(i) B ist rekursiv aufzählbar, wie man unmittelbar an dem folgenden stufenweisen Aufzählungsverfahren erkennt:

Stufe n : Berechne den Wert $f(n)$ und vergleiche ihn mit allen $f(i)$ für $1 \leq i \leq n-1$. Wenn $f(n) \leq f(i)$ für ein i , übernehme i in die Liste für B .

(ii) $\bar{B}$ ist hyperfrei. Denn:

- (1) $\bar{B}$ ist unendlich. Wir zeigen dazu für beliebig gegebenes x , daß es ein $y \in \bar{B}$ mit $y > x$ gibt. Sei $z = \min \{f(s) \mid s > x\}$; dann gibt es wegen der Injektivität von f genau ein $y > x$ mit $f(y) = z$. Offensichtlich ist y minimal.
- (2) $\bar{B}$ wird von keiner rekursiven Funktion majorisiert. Denn angenommen, g rekursiv mit $g(n) > z_n$, wobei $z_0, z_1, z_2, \dots$ die Elemente von $\bar{B}$ in (nicht-effektiver) streng monoton steigender Folge seien. Für zwei minimale x, y mit $x < y$ gilt offenbar $f(x) < f(y)$. Hieraus folgt durch Induktion $f(z_n) > n$ für alle n . Aus der Minimalität der z_n ergibt sich hiermit für alle x die Bedingung:
 $(+) \quad x \in A \iff x \in \{f(0), \dots, f(z_x)\}.$
 Also gilt wegen $z_x \leq g(x)$: $x \in A \iff x \in \{f(0), \dots, f(g(x))\}$. Damit ist aufgrund der Entscheidbarkeit der rechten Seite A rekursiv - im Widerspruch zur Voraussetzung! -

Bleibt zu zeigen, daß $B \equiv_T A$.

" $B \leq_T A$ ": Für alle x gilt: $x \in B \iff \exists y > x [f(y) < f(x)] \iff \exists z < f(x) [z \in A \text{ \& } z \notin \{f(0), \dots, f(x)\}]$ (definiere $z := f(y)$ und beachte, daß f injektiv); und die rechte Seite ist relativ A entscheidbar.

" $A \leq_T B$ ": Wegen $B \equiv_T \bar{B}$ genügt es, $A \leq_T \bar{B}$ zu zeigen. Dies folgt unmittelbar aus (+) oben, da sich die z_n relativ $\bar{B}$ berechnen lassen.

§8.4 T-Reduzierbarkeit und tt-Reduzierbarkeit

In §3.3 definierten wir Zylinder, die sich (vgl. Satz 3, S.72) als genau die Mengen erwiesen, auf die eine Menge bereits 1-reduzierbar ist, wenn sie m-reduzierbar auf sie ist. Es ergab sich (ibid.), daß jeder m-Grad einen maximalen 1-Grad enthält, welcher gerade durch Zylindrifizierung eines beliebigen seiner Elemente entsteht.- Ganz analog war aufgrund der Definition der tt-Zylinder in §4.3, daß jeder tt-Grad einen maximalen 1- bzw. m-Grad enthält, der durch tt-Zylindrifizierung eines beliebigen seiner Elemente entsteht (S.105).- Es drängt sich daher die Frage auf, ob wir in weiterer Analogie auch Mengen so als "T-Zylinder" auszeichnen können, daß die "T-Zylindrifizierung" einer beliebigen Menge eines T-Grades zu einem maximalen 1- bzw. tt-Grad in diesem führt. Daß dies prinzipiell nicht möglich ist, zeigt Rogers anhand eines Gegenbeispiels, i.e. eines T-Grades, welcher keinen maximalen tt-Grad enthält. Dabei wird die Konstruktion von $\tilde{K}$ (§4.4) für beliebige Mengen verallgemeinert.

Satz 1: Der T-Grad von K enthält keine in bezug auf $\leq_{tt}$ maximale Menge.

Beweis: Definiere zu einer beliebigen Menge A die Menge

$$\tilde{A} := \{x \mid \varphi_x(x) \in A^{tt}\} = \{x \mid \varphi_x(x) \text{ definiert \& A erfüllt die tt-Bedingung } \varphi_x(x)\}.$$

Dann gilt für jedes A mit $K \leq_T A$:

(i) $A \leq_1 \tilde{A}$, also insbesondere $A \leq_T \tilde{A}$;

(ii) $\tilde{A} \leq_T A$, woraus mit (i) $A \equiv_T \tilde{A}$ folgt; und

(iii) $\tilde{A} \not\leq_{tt} A$.- Das heißt, daß für jedes Element A des T-Grades von K auch $\tilde{A}$ in $d_T(K)$ liegt, wobei jedoch $\tilde{A}$ nicht tt-reduzierbar auf A ist. Daher kann $d_T(K)$ kein in bezug auf $\leq_{tt}$ maximales Element enthalten.-

Zu (i): Definiere für alle x die konstante Funktion ψ durch

$\psi(x,y) := ((x),\alpha)$ mit α als der einstelligen Booleschen Identität (für alle y). Dann gibt es nach dem s-m-n-Theorem ein rekursives f mit $\psi = \varphi_{f(x)}$. Wegen $x_1 \neq x_2 \Rightarrow ((x_1),\alpha) \neq ((x_2),\alpha) \Rightarrow \varphi_{f(x_1)} \neq \varphi_{f(x_2)} \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ ist f injektiv, wobei für alle x folgt: $x \in A \Leftrightarrow c_A(x) = 1 \Leftrightarrow \alpha(c_A(x)) = 1 \Leftrightarrow A \text{ erfüllt } ((x),\alpha) = \varphi_{f(x)}(y)$ (für alle y) $\Leftrightarrow A \text{ erfüllt } \varphi_{f(x)}(f(x)) \Leftrightarrow f(x) \in \tilde{A}$.

Also $A \leq_1 \tilde{A}$ via f.

Zu (ii): Für beliebiges z ist relativ A zu entscheiden, ob $z \in \tilde{A}$. Da nach Voraussetzung $K \leq_T A$, ist $z \in K$ entscheidbar. Gilt $z \notin K$, dann ist $\varphi_z(z)$ undefiniert, und damit $z \notin \tilde{A}$. Gilt $z \in K$, so berechne $\varphi_z(z)$ und prüfe, ob A die tt-Bedingung $\varphi_z(z) = ((x_1, \dots, x_k), \alpha)$ erfüllt. (Da A n. Vor. entscheidbar, sind die Werte $c_A(x_1), \dots, c_A(x_k)$, also auch $\alpha(c_A(x_1), \dots, c_A(x_k))$ berechenbar.) Wenn ja, so $z \in \tilde{A}$; falls nicht, so $z \notin \tilde{A}$.

Zu (iii): Indirekt. Angenommen, $\tilde{A} \leq_{tt} A$. Dann gilt auch $\tilde{\tilde{A}} \leq_{tt} A$, d.h. es

gibt eine rekursive Funktion f derart, daß für alle x : $x \in \tilde{A} \Leftrightarrow A$ erfüllt die tt-Bedingung $f(x)$. Sei $f = \mathcal{P}_{x_0}$ für geeignetes x_0 . Dann folgt: $x_0 \in \tilde{A} \Leftrightarrow \Leftrightarrow A$ erfüllt $f(x_0) = \mathcal{P}_{x_0}(x_0) \Leftrightarrow x_0 \in \tilde{A}$ - Widerspruch! Also $\tilde{A} \not\leq_{tt} A$.

Korollar: (a) Kein T-Grad oberhalb dem von K enthält einen maximalen tt-Grad.
 (b) Jeder T-Grad oberhalb dem von K enthält eine unendliche Folge von tt-Graden, die in bezug auf $\leq_{tt}$ mit dem Ordnungstyp der natürlichen Zahlen linear geordnet ist.

Beweis: (a) Sei $d_T(D)$ ein T-Grad über $d_T(K)$, d.h. $K \leq_T D$. Angenommen, $d_T(D)$ enthält ein tt-maximales A . Dann gilt insbesondere $\tilde{A} \leq_{tt} A$. Da nach Vor. $K \leq_T A$, steht dies im Widerspruch zu (iii) im Beweis des Satzes.

(b) Sei $A \in d_T(D)$ (wie in (a)). Definiere

$$A_0 := \tilde{A};$$

$$A_{n+1} := \tilde{A}_n.$$

Dann gilt $A_n \in d_T(D)$ für alle n , aber $A_{n+1} \not\leq_{tt} A_n$ für alle n .

Das heißt: $A_0 <_{tt} A_1 <_{tt} \dots$.

Satz 1 ist leicht als Korollar zu §8.2, Satz 5 und Satz 7 zu beweisen. Denn nach dem ersten dieser Sätze enthält jeder T-Grad genau dann einen maximalen l-Grad, wenn er einen maximalen tt-Grad besitzt. Daher ist unter der Annahme, daß $d_T(K)$ die in bezug auf $\leq_{tt}$ maximale Menge D enthält, maximal bzgl. $\leq_1$; und folglich gilt nach dem zweiten der zitierten Sätze mit D anstelle von A für die dort definierte Menge C (S.194f.): $C \equiv_T D$, aber $C \not\leq_1 D$ - im Widerspruch zur $\leq_1$ -Maximalität von D .

Jockusch(1966) zeigt, daß jeder nicht-rekursive rekursiv aufzählbare T-Grad unendlich viele rekursiv aufzählbare m-Grade enthält.- Enthält jeder rekursiv aufzählbare T-Grad einen unter den rekursiv aufzählbaren tt-Graden, die in ihm enthalten sind, in bezug auf $\leq_{tt}$ maximalen rekursiv aufzählbaren T-Grad? Rogers(1967) konstatiert, daß diese Frage noch offen sei. Im Falle des T-Grades von K ist offenbar $d_{tt}(K)$ maximal.

Wir zeigen als nächstes, daß die T-vollständigen Mengen nicht mit den tt-vollständigen zusammenfallen. Dazu benützen wir die Definition der hyperschlichten Menge im letzten Paragraphen zusammen mit dem Resultat von Post, daß eine tt-vollständige Menge nicht hyperschlicht sein kann. Da jede tt-vollständige Menge - nach dem Satz von Dekker - mit einer hyperschlichten T-äquivalent ist, ergibt sich daraus unsere Behauptung als Korollar. Der Beweis des Satzes steht in enger Beziehung zu dem von Satz 1 aus §5.2, daß eine btt-vollständige Menge schlicht ist. Wieder beweisen wir zuerst ein dem in §5.2 analoges - Lemma.

Lemma: Sei A rekursiv aufzählbar mit $K \leq_{tt} A$. Dann gibt es eine unendliche rekursiv aufzählbare Menge von tt-Bedingungen $t_0, t_1, t_2, \dots$ mit den zugehörigen Mengen $T_0, T_1, T_2, \dots$ derart, daß

- (i) für jedes i t_i von A erfüllt wird;
- (ii) für jedes i $T_i \cap \bar{A} \neq \emptyset$ ist; und
- (iii) für jede endliche Menge D die Menge $\{i \mid T_i \cap \bar{A} \subset D\}$ nicht mehr als 2^d Elemente besitzt, wobei d die Mächtigkeit von D ist.

Beweis: Sei A rekursiv aufzählbar mit $K \leq_{tt} A$. Gelte insbesondere $\bar{K} \leq_{tt} A$ via f; d.h. für alle $x: x \notin K \iff$ tt-Bedingung f(x) von A erfüllt. Dann konstruiere die Folge $t_0, t_1, t_2, \dots$ genau wie im Beweis des Lemmas aus §5.2. Betrachte also zuerst die rekursiv aufzählbare Menge C aller tt-Bedingungen, welche - im Sinne von §5.2 - Formeln der Gestalt " $x \in X$ " mit $x \in A$ entsprechen, und sodann die - ebenfalls rekursiv aufzählbare - Menge C_0 aller tt-Bedingungen, die aus denen in C (im früheren Sinne) ableitbar sind. Sei dann B_0 das Urbild von C_0 unter f, also $B_0 := \{x \mid f(x) \in C_0\}$ (i.e. die Menge aller Zahlen x, deren f-Bild als tt-Bedingung aus den tt-Bedingungen von C ableitbar ist. Sei x_0 ein rekursiv aufzählbarer Index für B_0 . Dann definiere $t_0 := f(x_0)$. - Unter der Voraussetzung, daß t_k bereits definiert ist, sei C_{k+1} die rekursiv aufzählbare Menge aller tt-Bedingungen, die aus den tt-Bedingungen von $C_k \cup \{t_k\}$ ableitbar sind, und $B_{k+1} := f^{-1}(C_{k+1}) = W_{x_{k+1}}$ für geeignetes x_{k+1} . Dann sei $t_{k+1} := f(x_{k+1})$. Dann zeigt man genau wie im Lemma von §5.2 durch Induktion die Gültigkeit der Behauptungen (i) und (ii). - Um (iii) zu zeigen, definieren wir zu einer beliebigen tt-Bedingung t den Begriff der abgeleiteten Wahrheitstafel zu t wie folgt. Sei $t = ((x_1, \dots, x_k), \alpha)$ mit der zugeordneten Menge $T = \{x_1, \dots, x_k\}$. Angenommen, n Elemente von $\{x_1, \dots, x_k\}$ sind in $T \cap \bar{A}$, $0 < n \leq k$. Definiere dann die abgeleitete Wahrheitstafel α' zu t durch

$$\alpha' := \lambda w_1 w_2 \dots w_n [\alpha(a_1, a_2, \dots, a_k)],$$

wobei $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ aus $(x_1, x_2, \dots, x_k)$ dadurch entsteht, daß man jedes x_j , das in A liegt, durch die Zahl 1, und die übrigen x_j (die also nicht in A liegen) der Reihe nach durch $w_1, w_2, \dots, w_n$ ersetzt. - Sei zum Beispiel $t = ((x_1, x_2, x_3, x_4), \alpha)$ mit $x_1, x_3 \in A$ und $x_2, x_4 \in \bar{A}$. Dann ist $\alpha' = \lambda w_1 w_2 [\alpha(1, w_1, 1, w_2)]$ die abgeleitete Wahrheitstafel zu t.

Konstruiere nun die Folge $t_0^!, t_1^!, t_2^!, \dots$ aus $t_0, t_1, t_2, \dots$ wie im Beweis des Lemmas in §5.2: für jedes i entsteht die tt-Bedingung $t_i^!$ aus t_i dadurch, daß man - bei gleichbleibender zugeordneter Menge T_i - das n_i -Tupel von t_i in der Weise ordnet, daß zuerst die Elemente von $T_i \cap \bar{A}$ in monotoner Folge, und dann jene von $T_i \cap A$ (in beliebiger Reihenfolge) erscheinen. Entsprechend erhält man die Boolesche Funktion von $t_i^!$ durch Umordnung der Argumente der Booleschen Funktion von t_i . Die tt-Bedingungen t_i und $t_i^!$ sind dann trivialerweise äquivalent und wechselseitig voneinander ableitbar. -

Seien nun t_1 und t_j derart, daß $T_1 \cap \bar{A} = T_j \cap \bar{A}$. Dann müssen die t_1^j und t_j^j zugeordneten abgeleiteten Wahrheitstabeln verschieden sein. Andernfalls, d.h. hätten t_1^j und t_j^j dieselben abgeleiteten Wahrheitstabeln, würde t_j^j aus t_1^j und C , sowie t_1^j aus t_j^j und C ableitbar sein. Dies ist wie im Beweis des Lemmas in §5.2 (S.115) einzusehen, wo wir die - etwas stärkere - Voraussetzung hatten, daß die zu t_1^j und t_j^j gehörigen Booleschen Funktionen gleich sind. Aus der Gleichheit der abgeleiteten Wahrheitstabeln folgt dies im allgemeinen noch nicht. Betrachtet man jedoch die zugehörigen aussagenlogischen Sätze, so unterscheiden sich diese nur um Teilformeln der Gestalt " $n \in X$ " mit $n \in A$. Da diese jedoch aus C ableitbar sind, können wir hier o.E. annehmen, daß die zu t_1^j und t_j^j gehörigen Booleschen Funktionen gleich sind. Sei nun D eine endliche Menge der Mächtigkeit d . Da D 2^d Teilmengen hat, können höchstens 2^d Teilmengen von D in $\bar{A}$ enthalten sein. Jede von diesen hat eine Mächtigkeit $\leq d$. Daher hat jede Teilmenge höchstens 2^{2^d} verschiedene abgeleitete Wahrheitstabeln, die ihr entsprechen. (-Wir sagen, daß eine abgeleitete Wahrheitstafel α' einer endlichen Menge D' entspricht, wenn $D' = T_1 \cap \bar{A}$ für ein t_1 und α' die abgeleitete Wahrheitstafel zu t_1^j ist.) Es gilt: $2^{2^d} \cdot 2^d = 2^{2^d+d} < 2^{2^{d+1}}$. Hätte daher die Menge $\{t_1^j \mid T_1 \cap \bar{A} \subset D\}$ mehr als $2^{2^{d+1}}$ Elemente, so würden mindestens zwei davon einen Durchschnitt mit $\bar{A}$ liefern und dieselben Wahrheitstabeln haben - Widerspruch! - Damit ist das Lemma bewiesen.

Satz 2 (Post): A tt-vollständig $\Rightarrow A$ nicht hyperschlicht.

Beweis: Sei A tt-vollständig. Dann gilt insbesondere $K \leq_{tt} A$. Um zu zeigen, daß $\bar{A}$ nicht hyperfrei ist, beweisen wir die - nach §8.3, Satz 2 - äquivalente Bedingung, daß es eine rekursive Funktion g gibt derart, daß für alle u $D_{g(u)} \cap \bar{A} \neq \emptyset$, sowie für alle u und v mit $u \neq v$ $D_{g(u)} \cap D_{g(v)} = \emptyset$. Definieren dazu eine Funktion f wie folgt:

$$f(0) := \text{Maximum von } T_0, 2^{f(0)+3} \\ f(n+1) := \text{Maximum von } \bigcup_{j=0}^{2^{f(n)+2}} T_1^j ;$$

wobei $T_0, T_1, \dots$ die nach dem Lemma existierende Folge der den tt-Bedingungen $t_0, t_1, \dots$ zugeordneten Mengen sei. Da alle T_1 endlich sind, und folglich das Maximum einer endlichen Vereinigung von T_1 's effektiv ermittelt werden kann, ist f wohldefiniert und rekursiv.

Dann ist für jedes n die Menge $D_n := \{0, 1, \dots, f(n)\}$ mit der Mächtigkeit $f(n)+1$ endlich; d.h. nach Lemma (ii1), daß für alle n höchstens für $2^{f(n)+2}$ der T_1 's gelten kann $T_1 \cap \bar{A} \subset \{0, 1, \dots, f(n)\} = D_n$. Also muß für $2^{f(n)+3}$ der T_1 's gelten, daß $T_j \cap \bar{A} \not\subset \{0, 1, \dots, f(n)\}$ für ein j , d.h. $(T_j \cap \bar{A}) \cap \{f(n)+1, f(n)+2, \dots, f(n+1)\} \neq \emptyset$. Also insbesondere $\bar{A} \cap \{f(n)+1, \dots, f(n+1)\} \neq \emptyset$. Daher ist $\{0, 1, \dots, f(0)\}, \{f(0)+1, f(0)+2, \dots, f(1)\}, \dots, \{f(n)+1, \dots, f(n+1)\}, \dots$ eine Folge disjunkter endlicher Mengen, von denen jede A schneidet. Definiere also die gesuchte Funktion g

durch $g(0) := 2^0 + 2^1 + \dots + 2^{f(0)}$,
 $g(n+1) := 2^{f(n)+1} + 2^{f(n)+2} + \dots + 2^{f(n+1)}$ -

- dann hat g die gewünschten Eigenschaften. Q.e.d.

Korollar: Es gibt eine Menge, die T-vollständig, nicht aber tt-vollständig ist; daher unterscheiden sich $\leq_T$ und $\leq_{tt}$ (resp. $\equiv_T$ und $\equiv_{tt}$) auf den rekursiv aufzählbaren Mengen.

Beweis: Nach dem Satz von Dekker existiert im T-Grad von K eine hyperschlichte Menge $\hat{K}$; dann gilt $K \leq_T \hat{K}$, jedoch $K \not\leq_{tt} \hat{K}$, da andernfalls $\hat{K}$ tt-vollständig wäre - im Widerspruch zum Satz! Also $K \equiv_T \hat{K}$ sowie $K \not\equiv_{tt} \hat{K}$.

Etwas tiefere Einsicht in die Beziehung zwischen $\leq_T$ und $\leq_{tt}$ vermittelt der folgende Satz von Nerode(1957). Er beantwortet die Frage, welche zusätzlichen Bedingungen im Fall von $A \leq_T B$ (i.e. per definitionem $\exists z [c_A = \varphi_z^B]$) noch erfüllt sein müssen, damit bereits $A \leq_{tt} B$ gilt.

Satz 3 (Nerode): Es sind äquivalent:

- (i) $A \leq_{tt} B$;
- (ii) $\exists z [c_A = \varphi_z^B \ \& \ \forall x [\varphi_z^X \text{ ist eine charakteristische Funktion}]]$;
- (iii) $\exists z [c_A = \varphi_z^B \ \& \ \forall x [\varphi_z^X \text{ ist total}]]$.

Beweis: "(i) $\Rightarrow$ (ii)": Gelte $A \leq_{tt} B$ via f . Definiere ψ durch

$$\psi(x) := \begin{cases} 1, & \text{wenn tt-Bedingung } f(x) \text{ von } X \text{ erfüllt;} \\ 0, & \text{andernfalls.} \end{cases}$$

Da ψ rekursiv, wenn X rekursiv, ist ψ offenbar eine X -rekursive Funktion. Gelte $\psi = \varphi_{z_0}^X$ für geeignetes z_0 . Da $\varphi_{z_0}^X(x) \in \{0,1\}$ für alle x , ist $\varphi_{z_0}^X$ für alle X eine charakteristische Funktion. Dabei gilt: $c_A(x) = 1 \Leftrightarrow x \in A \Leftrightarrow f(x)$ von B erfüllt $\Leftrightarrow \varphi_{z_0}^B(x) = 1$; i.e. $c_A = \varphi_{z_0}^B$.

"(ii) $\Rightarrow$ (iii)": klar, da jede charakteristische Funktion total ist.

"(iii) $\Rightarrow$ (i)": Sei z_1 so gegeben, daß $\varphi_{z_1}^X$ total für alle X und $c_A = \varphi_{z_1}^B$.

Um $A \leq_{tt} B$ zu zeigen, konstruieren wir eine rekursive Funktion f derart, daß für alle x : $x \in A \Leftrightarrow$ tt-Bedingung $f(x)$ von B erfüllt. Der Wert $f(x)$ ist folgendermaßen zu berechnen (x beliebig). Erzeuge das Diagramm für die Berechnung von $\varphi_{z_1}^X(x)$ gemäß unserer Illustration in §7.2 (vgl. S.146ff.). Aufgrund unserer Annahme, daß $\varphi_{z_1}^X$ total für alle X , bricht jeder Ast ab. Nach dem Kompaktheitssatz für Bäume ist dann das gesamte Diagramm endlich. Sei D die Menge aller Zahlen, für die an irgendeiner Gabelung die Frage ihrer Zugehörigkeit zu X gestellt wird. Seien $x_1, \dots, x_k$ die Elemente von D in wachsender Ordnung. Dann stellt $(x_1, \dots, x_k)$ das k -Tupel für unsere gesuchte tt-Bedingung $f(x)$ dar. Die dazugehörige Boolesche Funktion α erhält man wie folgt. Für jedes $(w_1, \dots, w_k) \in \mathbb{I}^k$ sei $Y := \{x_i \mid w_i = 1\}$. Berechne $\varphi_{z_1}^Y(x)$. Wenn $\varphi_{z_1}^Y(x) = 0$, setze $\alpha(w_1, \dots, w_k) := 0$; wenn $\varphi_{z_1}^Y(x) \neq 0$, setze $\alpha(w_1, \dots, w_k) := 1$. Dann folgt $A \leq_{tt} B$ via f . Q.e.d.

PITEL IX: Aufzählungs-Reduzierbarkeit

1.1 Definition und einfache Eigenschaften; Aufzählungsoperatoren

Wir befassen uns schließlich mit einem Begriff, der in enger Beziehung zu den bisher betrachteten Reduzibilitäten und anderen Teilen der Rekursionstheorie steht. Nachdem wir in den beiden letzten Kapiteln in Gestalt der Turing-Reduzierbarkeit die allgemeinste Definition von Reduzierbarkeit behandelt haben, ist klar, daß es sich bei dem neuen Begriff nicht mehr um eine Präzisierung von Reduzierbarkeit im eigentlichen Sinn handeln kann. Nun wir ihn dennoch - mit Rogers(1967) - als eine "Reduzierbarkeit" auffassen, so deshalb, um damit einen natürlichen Zusammenhang geltend zu machen, welcher, wie Rogers schreibt, bei seiner Behandlung sowie auch der verwandter Begriffe gelegentlich übersehen wird.

Intuitiv gesprochen, gelangen wir zum Begriff der **Aufzählungs-Reduzierbarkeit** (engl. "enumeration reducibility"), indem wir in unserem intuitiven Verständnis von Reduzierbarkeit die Forderung der Entscheidbarkeit durch die der Aufzählbarkeit ersetzen. War, informell ausgedrückt, eine Menge auf eine zweite reduzierbar, wenn ein Verfahren zur Entscheidung der zweiten ein Verfahren zur Entscheidung der ersten liefert, so soll nunmehr eine Menge auf eine zweite **aufzählbar** heißen, wenn es ein effektives Verfahren gibt, aus einer (beliebigen!) Aufzählung der zweiten eine Aufzählung der ersten zu gewinnen. Ausführlicher läßt das Verfahren sich wie folgt beschreiben. Betrachte die Mengen A und B , sowie ein Verfahren, das durch eine endliche Menge von Vorschriften auf folgende Art festgelegt ist. Man beginnt mit einer Rechnung, welche algorithmisch verläuft, außer daß der Rechner von Zeit zu Zeit nach einer Zahl als "Input" verlangen kann, und das Verfahren von Zeit zu Zeit eine Zahl als "Output" liefert. Wird ein Input verlangt, so kann eine beliebige Zahl, oder auch keine, geliefert werden. Nehmen wir aber an, falls die Elemente von B -gleichgültig, in welcher Reihenfolge - als Inputs bereitgestellt werden, die Rechnung schließlich immer die Menge A - in irgendeiner Folge - als Outputs liefert. Dabei mag die Reihenfolge, in der die Elemente von A erscheinen, sich entsprechend der Folge der Inputs ändern. Sie sollen sowohl in der Liste für B als auch in der für A Wiederholungen gelassen sein. Existiert solch ein Verfahren, so nennen wir A **aufzählungsreduzierbar auf B** . In diesem Fall führt eine beliebige Aufzählung von B , indem die Elemente nacheinander als Inputs gestellt werden, stets zu einer entsprechenden Aufzählung von A .

Betrachten wir als Beispiel ein Verfahren, das nach einer Zahl als Input verlangt und das Doppelte dieser Zahl als Output liefert; nach einem

weiteren Input verlangt und wieder dessen Doppeltes als Output liefert; &c. Dann ist vermöge dieses Verfahrens $\{2,4\}$ aufzählungs-reduzierbar auf $\{1,2\}$; die Menge der geraden Zahlen $\{0,2,4,\dots\}$ aufzählungs-reduzierbar auf die der natürlichen $\mathbb{N} = \{0,1,2,\dots\}$; die Menge der Zehnerpotenzen $\{10^1, 10^2, 10^3, \dots\}$ aufzählungs-reduzierbar auf $\{5,50,500,\dots\}$; usw.- Betrachte ferner ein Verfahren, das überhaupt keine Inputs verlangt, doch jedenfalls K als Outputs listet. Dann ist K in bezug darauf auf jede beliebige Menge aufzählungs-reduzierbar.- Schließlich sei ein Verfahren gegeben, das K als Outputs listet, sobald die Zahlen 0 und 1 als Inputs geliefert werden. Dann ist K aufzählungs-reduzierbar auf die Menge $\{0,1\}$.

Wie ist dieser vorerst noch intuitive Begriff der Aufzählungs-Reduzierbarkeit adäquat zu präzisieren? Wir umgehen die Schwierigkeiten einer eventuellen Charakterisierung durch entsprechend modifizierte Turingmaschinen, indem wir sie - ähnlich unserem Vorgehen im Fall der Turing-Reduzierbarkeit - mithilfe des grundlegenden Begriffs der partiell rekursiven Funktion definieren. Zur Motivation unseres Vorgehens zeigen wir, wie der intuitive Begriff dazu führt. Sei ein Verfahren gegeben, vermöge dessen A intuitiv-verweise aufzählungs-reduzierbar auf B ist. Betrachte nun alle endlichen Folgen von verschiedenen natürlichen Zahlen. Wir sagen, daß eine Zahl x von einer Folge $(y_1, \dots, y_k)$ erzeugt wird, wenn das Verfahren x als Output liefert, nachdem $y_1, \dots, y_k$ der Reihe nach als Inputs eingegeben wurden, und zwar noch ehe ein weiterer Input verlangt wird. So wird per definitionem bei unserem ersten Beispiel der Aufzählungs-Reduzierbarkeit von $\{2,4\}$ auf $\{1,2\}$ die Zahl 2 von der Zahl 1, und 4 von 2 erzeugt; im Fall der Aufzählungs-Reduzierbarkeit der geraden auf die natürlichen Zahlen allgemein die Zahl $2n$ von n; &c.- Dagegen wird beim zweiten Beispiel der Aufzählungs-Reduzierbarkeit von K auf jede beliebige Menge jedes Glied der Aufzählung von K von der leeren Folge $\emptyset$ erzeugt.- Bei der Aufzählungs-Reduzierbarkeit von K auf $\{0,1\}$ in unserem letzten Beispiel wird das erste Element in der Liste für K von der Folge $(0,1)$, und jedes weitere von der leeren Folge erzeugt. Da in diesem Fall nach der Eingabe von 0 und 1 kein weiterer Input erforderlich ist, wird beispielsweise von der Folge $(0,1,2)$ keine Zahl erzeugt.- Indem wir nun - immer im Rahmen unseres fest gegebenen Verfahrens - der Reihe nach alle endlichen Folgen von verschiedenen Zahlen, von welchen ein Output erzeugt wird, betrachten, gelangen wir zu einer rekursiven Aufzählung der Menge $\{ \langle x, u \rangle \mid x \text{ wird von } (y_1, \dots, y_k) \text{ erzeugt} \ \& \ D_u = \{y_1, \dots, y_k\} \}$ aller kodierten Paare, deren erste Komponente erzeugt wird von der Folge, deren Glieder genau die Elemente der endlichen Menge mit der zweiten Komponente als kanonischem Index sind. Beginne nämlich mit der Rechnung und fahre fort, bis eine erste Zahl y_1 als Input verlangt wird. Gib dieses ein

und rechne weiter. Liefert das Verfahren einen Output x , so kodiere das Paar $\langle x, 2^{y_1} \rangle$ und übernehme es in die Liste. Erscheint kein Output, und wird stattdessen nach einiger Zeit ein weiteres y_2 als Input verlangt, so liefere auch dieses. Erscheint hierauf als Output die Zahl x , kodiere das Paar $\langle x, 2^{y_1+2^{y_2}} \rangle$ und nimm es in die Liste auf; usw.; liefert so das Verfahren nach Bereitstellung von endlich vielen verschiedenen Inputs $y_1, \dots, y_k$ den Output x , kodiere das Paar $\langle x, 2^{y_1+\dots+2^{y_k}} \rangle$ und nehme es in die Liste. Dann fahre mit der Rechnung solange fort, bis ein neuer Input gefordert wird; &c. Tritt im Verlauf dieser Rechnung der Fall ein, daß das Verfahren einen Output liefert (etwa x), so nehme daß zuerst ein Input verlangt worden ist, so liste das kodierte Paar $\langle x, 0 \rangle$. Somit erhalten wir effektiv eine Aufzählung für die obige Menge, d.h. es

gibt eine Zahl z derart, daß

$$A = \{ \langle x, u \rangle \mid x \text{ wird von } (y_1, \dots, y_k) \text{ erzeugt} \ \& \ D_u = \{y_1, \dots, y_k\} \} \text{ .-}$$

Aufgrund unserer Voraussetzung, daß die Menge A ohne Rücksicht auf die Reihenfolge, in der die Elemente von B als Inputs erscheinen, gelistet wird, ist es leicht zu sehen, daß für alle Zahlen x gilt: $x \in A \Leftrightarrow \exists u [\langle x, u \rangle \in W_z \ \& \ D_u \subset B]$. Sei nämlich $x \in A$, d.h. x erscheint irgendwann als Output des Verfahrens, nachdem entweder kein Input gefordert wurde, oder, falls doch, eine endliche Folge $(y_1, \dots, y_k)$ von Elementen von B . Im ersten Fall gilt $\langle x, 0 \rangle \in W_z$, wobei trivialerweise $D_0 = \emptyset \subset B$; in letzterem $\langle x, u \rangle = \langle x, 2^{y_1+2^{y_2}+\dots+2^{y_k}} \rangle \in W_z$, mit $D_u = \{y_1, \dots, y_k\} \subset B$. Umgekehrt muß, falls ein u mit $\langle x, u \rangle \in W_z$ sowie $D_u \subset B$ existiert, x von einer endlichen Folge mit den Elementen von D_u als Komponenten erzeugt sein. Das heißt, x erscheint als Output des Verfahrens, nachdem die Elemente von $D_u \subset B$ als Inputs geliefert worden sind. Dann aber muß x nach unserer Voraussetzung der Aufzählung von A angehören. Damit liegt unsere Definition nahe.

Definition: A heißt aufzählungs-reduzierbar auf B (in Zeichen: $A \leq_e B$), wenn es ein z gibt, so daß für alle x gilt: $x \in A \Leftrightarrow \exists u [\langle x, u \rangle \in W_z \ \& \ D_u \subset B]$.
 $A \leq_e B$ via z : $\Leftrightarrow \forall x [x \in A \Leftrightarrow \exists u [\langle x, u \rangle \in W_z \ \& \ D_u \subset B]]$.

A ist demnach e-reduzierbar auf B (- so unsere abkürzende Schreibweise), wenn es ein Verfahren der eingangs beschriebenen Art gibt, so daß A aus genau den Zahlen besteht, welche von einer endlichen Folge von verschiedenen Elementen von B erzeugt werden.- Beachte, daß umgekehrt jedes z ein solches Verfahren liefert. Dieses verläuft wie folgt. Beginne gleichzeitig mit, W_z aufzuzählen und Inputs zu verlangen. Wenn immer man feststellt, daß in W_z bereits ein $\langle x, u \rangle$ aufgetreten ist, für das D_u in der Menge der bereits vorliegenden Inputs enthalten ist, und für das x noch nicht als Output geliefert wurde, ist x zur Liste der Outputs hinzuzufügen. Dann liefert das Verfahren für jede Menge von Inputs stets dieselbe Menge von Outputs, ohne Rücksicht auf die Reihenfolge, in der die Inputs auftreten. Auf diese Weise

bestimmen jedes z - als rekursiv aufzählbarer Index der Menge der kodierten Paare, die aufgelistet wird - und jedes B - als Menge der Inputs, welche verlangt werden - eindeutig eine Menge A , so daß $A \leq_e B$ via z , nämlich $A = \{x \mid \exists u [\langle x, u \rangle \in W_z \text{ \& } D_u \subset B]\}$. (Sei nämlich x aus A , der Menge der Outputs. Dann gibt es ein u derart, daß das kodierte Paar $\langle x, u \rangle$ in der Aufzählung von W_z auftritt, und zwar so, daß die endliche Menge mit u als kanonischem Index in der Menge der aufgelisteten Inputs, d.h. B , enthalten ist.- Gebe es umgekehrt ein u mit $\langle x, u \rangle \in W_z$, wobei $D_u = \{y_1, \dots, y_k\}$ eine Teilmenge der vorliegenden Inputs ist. Dann sind auf einer gewissen Stufe alle $y_1, \dots, y_k$ als Inputs aufgetreten, und aufgrund der Vorschrift gelangt x in die Menge A der Outputs.)

Wie jede unserer Präzisierungen von Reduzierbarkeit ist die Relation $\leq_e$ reflexiv und transitiv. Sei nämlich die Menge A beliebig gegeben. Betrachte ein Verfahren, bei dem ein Input verlangt und alsdann als Output geliefert wird; ein weiterer Input verlangt und als Output geliefert wird; &c. Dann wird, wenn die Menge A eingegeben wird, A ausgegeben - d.h. A ist vermöge dieses Verfahrens aufzählungs-reduzierbar auf sich selbst. Also $\leq_e$ reflexiv.- Gelte nun intuitiverweise $A \leq_e B$ und $B \leq_e C$. Dann gibt es zum einen ein Verfahren, welches für die Elemente von B als Inputs die Menge A als Outputs liefert, zum andern eines, das für die Elemente von C als Inputs B als Outputs liefert. Schalte nun diese beiden Verfahren hintereinander. Dann werden, falls die Elemente von C als Inputs bereitgestellt werden, zuerst die Elemente von B als Outputs geliefert und dann, wenn diese als Inputs geliefert werden, A als die Menge der Outputs gelistet. Also wird, wenn C als Inputs eingegeben wird, A als die Outputs geliefert; d.h. $A \leq_e C$. Also $\leq_e$ transitiv.- Der formale Beweis findet sich zu dem folgenden Satz.

Satz 1: (i) $\leq_e$ ist reflexiv.
(ii) $\leq_e$ ist transitiv.

Beweis: (i) Definiere die offenbar rekursiv aufzählbare (sogar rekursive) Menge W durch $W := \{\langle x, 2^x \rangle \mid x \in \mathbb{N}\}$. Sei $W = W_z$ für geeignetes z .

Dann gilt $A \leq_e A$ via z für beliebiges A ; denn:

" $\Rightarrow$ ": $x \in A \Rightarrow \langle x, 2^x \rangle \in W_z$ & $D_{2^x} = \{x\} \subset A$; sowie

" $\Leftarrow$ ": $\langle x, 2^x \rangle \in W_z$ & $D_{2^x} \subset A \Rightarrow \{x\} \subset A \Rightarrow x \in A$.-

(ii) Gelte $A \leq_e B$ via z_0 und $B \leq_e C$ via z_1 , d.h.

$A = \{x \mid \exists u [\langle x, u \rangle \in W_{z_0} \text{ \& } D_u \subset B]\}$ und

$B = \{x \mid \exists u [\langle x, u \rangle \in W_{z_1} \text{ \& } D_u \subset C]\}$

Definiere W durch $W = \{\langle x, u \rangle \mid \exists y [\langle x, y \rangle \in W_{z_0} \text{ \& } \forall z \in D_y \exists v [\langle z, v \rangle \in W_{z_1} \text{ \& } D_v \subset C]]\}$.

Dann ist W rekursiv aufzählbar (vgl. dazu die Konstruktion von W im Beweis von Satz 3, §7.6, S.184f.), $W = W_z$ für geeignetes z .

Dann folgt für alle $x: x \in A \Leftrightarrow \exists y [\langle x, y \rangle \in W_{z_0} \text{ \& } D_y \subset B] \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \exists y [\langle x, y \rangle \in W_{z_0} \text{ \& } \forall z \in D_y \exists u_z [\langle z, u_z \rangle \in W_{z_1} \text{ \& } D_{u_z} \subset C]] \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \exists u [\langle x, u \rangle \in W_{z_0} \text{ \& } D_u \subset C].$

Also $A \leq_e C$ via z .

Aufgrund von Satz 1 können wir nun die Äquivalenzrelation " $\equiv_e$ " in Analogie zu unseren Präzisierungen von Reduzierbarkeit definieren. Entsprechend gelangen wir zum Begriff des e -Grades als einer Klasse von wechselseitig aufeinander aufzählungs-reduzierbaren Mengen.

Definition: $A \equiv_e B :\Leftrightarrow A \leq_e B \text{ \& } B \leq_e A.$

Bezeichnung: A e-äquivalent mit B .

Die Äquivalenzklassen von $\equiv_e$, i.e. die Klassen der Gestalt $d_e(A) := \{B \mid A \equiv_e B\}$, heißen e-Grade. Sie werden - im Hinblick auf die e-Grade partieller Funktionen - gelegentlich partielle Grade genannt; entsprechend heißt ihre Ordnung unter $\leq_e$ die Ordnung der partiellen Grade.

Satz 2: Die Ordnung der partiellen Grade ist ein oberer Halbverband.

Beweis: Wir zeigen, daß die Grade $d_e(A)$ und $d_e(B)$ den Grad $d_e(A \text{ Jung } B)$ als kleinste obere Schranke besitzen.

(1) Definiere (für geeignete z_0 und z_1)

$$W_{z_0} := \{\langle x, 2^{2x} \rangle \mid x \in \mathbb{N}\} \text{ \& } W_{z_1} := \{\langle x, 2^{2x+1} \rangle \mid x \in \mathbb{N}\}.$$

Dann gilt für alle $x: x \in A \Leftrightarrow 2x \in A \text{ Jung } B \Leftrightarrow \langle x, 2^{2x} \rangle \in W_{z_0} \text{ \& } D_{2^{2x}} = \{2x\} \subset A \text{ Jung } B \Leftrightarrow \exists u [\langle x, u \rangle \in W_{z_0} \text{ \& } D_u \subset A \text{ Jung } B];$ d.h. $A \leq_e A \text{ Jung } B$ via z_0 .

Sowie: $x \in B \Leftrightarrow 2x+1 \in A \text{ Jung } B \Leftrightarrow \langle x, 2^{2x+1} \rangle \in W_{z_1} \text{ \& } D_{2^{2x+1}} = \{2x+1\} \subset A \text{ Jung } B \Leftrightarrow \exists u [\langle x, u \rangle \in W_{z_1} \text{ \& } D_u \subset A \text{ Jung } B];$ d.h. $B \leq_e A \text{ Jung } B$ via z_1 .

Also ist $d_e(A \text{ Jung } B)$ eine obere Schranke von $d_e(A)$ und $d_e(B)$.

(11) Sei $d_e(C)$ eine beliebige obere Schranke von $d_e(A)$ und $d_e(B)$. Gelte

$A \leq_e C$ via z_0 und $B \leq_e C$ via z_1 . Definiere (für geeignetes z)

$W_z = \{\langle 2x, u \rangle \mid \langle x, u \rangle \in W_{z_0}\} \cup \{\langle 2x+1, u \rangle \mid \langle x, u \rangle \in W_{z_1}\}.$ Dann gilt für alle $x: x \in A \text{ Jung } B \Leftrightarrow (x \text{ gerade \& } \frac{x}{2} \in A) \text{ \& } (x \text{ ungerade \& } \frac{x-1}{2} \in B) \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow (x \text{ gerade \& } \langle x, u \rangle \in W_{z_0} \text{ \& } D_u \subset C) \text{ \& } (x \text{ ungerade \& } \langle x, u \rangle \in W_{z_1} \text{ \& } D_u \subset C)$ (für jeweils geeignetes u) $\Leftrightarrow \exists u [\langle x, u \rangle \in W_z \text{ \& } D_u \subset C];$

d.h. $A \text{ Jung } B \leq_e C$ via z . Also ist $d_e(A \text{ Jung } B)$ die kleinste obere Schranke von $d_e(A)$ und $d_e(B)$.

Während Satz 2 eine Gemeinsamkeit der e-Reduzierbarkeitsordnung mit den früher betrachteten Reduzierbarkeitsordnungen darlegt, konstatiert der nächste Satz einen signifikanten Unterschied. Galt nämlich spätestens für die Präzisierung des intuitiven Reduzierbarkeitsbegriffs durch $\leq_{\text{btt}}$, daß alle rekursiven Mengen in ein und demselben Grad der Unlösbarkeit liegen, welcher das kleinste Element der btt- , lt- bzw. $\text{T-Reduzierbarkeitsordnung}$ bildet, so gilt dies im Fall von $\leq_e$ für alle rekursiv aufzählbaren Mengen.

Darin spiegelt sich der Unterschied der jeweils präzisierten Begriffe: der von Reduzierbarkeit zum einen, der von "Aufzählungs"-Reduzierbarkeit zum anderen.

Satz 3: Die Ordnung der partiellen Grade besitzt den Grad der rekursiv aufzählbaren Mengen als kleinstes Element.

Beweis: (i) Wir zeigen zuerst, daß eine rekursiv aufzählbare Menge A auf jede beliebige Menge B e -reduzierbar ist. Definiere dazu

$W_z = \{ \langle x, 0 \rangle \mid x \in A \}$ (für geeignetes z). Dann gilt für alle x :
 $x \in A \iff \langle x, 0 \rangle \in W_z$ (mit $D_0 = \emptyset \subset B$) $\iff \exists u [\langle x, u \rangle \in W_z \ \& \ D_u \subset B]$;
 also $A \leq_e B$ via z . Insbesondere folgt, daß alle rekursiv aufzählbaren Mengen in einem e -Grad liegen, der seinerseits unter allen e -Graden liegt.

(ii) Bleibt zu zeigen, daß dieser ausschließlich rekursiv aufzählbare Mengen enthält. Dazu zeigen wir, daß jede auf eine rekursiv aufzählbare Menge B e -reduzierbare Menge A ebenfalls rekursiv aufzählbar ist. Sei $A \leq_e B$ via z . Dann gilt $A = \{ x \mid \exists u [\langle x, u \rangle \in W_z \ \& \ D_u \subset B] \}$. Also ist A nach dem folgenden Verfahren rekursiv aufzählbar:

Liste gleichzeitig W_z und B und prüfe für jedes $\langle x, u \rangle \in W_z$, ob D_u eine Teilmenge des bis dahin gelisteten Teils von B ist; wenn ja, zähle x in A .

Jedes z und B bestimmen, wie wir feststellen konnten, eindeutig eine Menge A mit $A \leq_e B$ via z , nämlich $A = \{ x \mid \exists u [\langle x, u \rangle \in W_z \ \& \ D_u \subset B] \}$. Ordnen wir, für fest gegebenes z , jeder beliebigen Menge B die korrespondierende Menge A zu, so wird durch z eine Abbildung von 2^N , der Potenzmenge der natürlichen Zahlen, in sich bestimmt. Wir nennen solche Abbildungen A u f - z ä h l u n g s o p e r a t o r e n und bezeichnen den der Zahl z entsprechenden Operator mit Φ_z .

Definition: Der Aufzählungsoperator $\Phi_z: 2^N \rightarrow 2^N$ ist definiert durch

$$\Phi_z(X) = Y : \iff Y \leq_e X \text{ via } z, \text{ i.e. } \Phi_z(X) = \{ x \mid \exists u [\langle x, u \rangle \in W_z \ \& \ D_u \subset X] \}.$$

Aufzählungsoperatoren sind, auf der Ebene der Mengen, eine Entsprechung zu den rekursiven Funktionen. Sie sind einfacher als jene insofern, als ein Aufzählungstheorem gilt; d.h. sie besitzen eine Gödelisierung auf N .

Satz 4: Sind Φ und Ψ Aufzählungsoperatoren, so ist auch ihre Komposition $\Phi\Psi$ ein Aufzählungsoperator.

Beweis: Das intuitive Argument lautet wie folgt. Wenden wir Ψ auf ein $X \in 2^N$ an, so erhalten wir eine Aufzählung einer Menge $Y = \Psi(X) \in 2^N$; wenden wir hierauf Φ an, so wird eine Menge $Z = \Phi(\Psi(X))$ aufgezählt. - Für den formalen

Beweis greifen wir auf unseren Beweis der Transitivität von $\leq_e$ in Satz 1 (S. 212f.) zurück. Wir zeigten dort eigentlich die etwas stärkere Aussage: $\forall z_0, z_1, \exists z \forall A, B, C [A \leq_e B \text{ via } z_0 \ \& \ B \leq_e C \text{ via } z_1 \implies A \leq_e C \text{ via } z]$. Daraus ist (wie die Transitivität von $\leq_e$) auch unsere jetzige Behauptung als Korollar abzuleiten. Gelte nämlich $\Phi = \Phi_{z_0}$ und $\Psi = \Phi_{z_1}$. Sei z wie oben gewählt; dann gilt für den Aufzählungsoperator Φ_z : $\Phi\Psi(C) = A \iff \exists B [\Psi(C) = B \ \& \ \Phi(B) = A] \iff \iff \exists B [\Phi_{z_1}(C) = B \ \& \ \Phi_{z_0}(B) = A] \iff \exists B [B \leq_e C \text{ via } z_1 \ \& \ A \leq_e B \text{ via } z_0] \stackrel{S. 1}{\iff} \iff A \leq_e C \text{ via } z \iff \Phi_z(C) = A$. Q.e.d.

Satz 5: Sei Ψ ein Aufzählungsoperator. Dann gilt:

- (a) $A \subset B \implies \Psi(A) \subset \Psi(B)$ (Ψ ist "monoton");
 (b) $x \in \Psi(A) \implies \exists D [D \text{ endlich} \ \& \ D \subset A \ \& \ x \in \Psi(D)]$. (Ψ ist "stetig").

Beweis: (a) Sei $A \subset B$. Dann ist, wenn Ψ ausgehend von einer Aufzählung von B eine Aufzählung von $\Psi(B) \in 2^{\mathbb{N}}$ liefert, da $A \subset B$, in dieser Aufzählung auch eine Aufzählung von $\Psi(A)$ enthalten. - Zum formalen Beweis gelte $x \in \Psi(A) =: \Phi_z(A)$. Dann gibt es ein u , so daß $\langle x, u \rangle \in W_z$ mit $D_u \subset A$. Da $A \subset B$, folgt $D_u \subset B$, also $x \in \Phi_z(B) = \Psi(B)$.
 (b) Sei $x \in \Psi(A) =: \Phi_z(A)$ mit $\langle x, u \rangle \in W_z$ und $D_u \subset A$ (für geeignetes u). Definiere $D := D_u$. Dann gilt: D endlich, $D \subset A$ und $\Psi(D) = \Phi_z(D) = \{x \mid \exists v [\langle x, v \rangle \in W_z \ \& \ D_v \subset D_u]\}$, also ist die Behauptung für $v := u$ erfüllt.

Wir werden im nächsten Paragraphen Aufzählungsoperatoren auf rechts- und eindeutige Relationen - und damit auf partielle Funktionen - anwenden. Dazu vorweg die entsprechenden Definitionen nebst einigen grundlegenden Beziehungen.

Definition: Für partielle Funktionen ψ und φ schreiben wir:

- (i) $\psi \leq_e \varphi \iff r(\psi) \leq_e r(\varphi)$;
 (ii) $\psi \equiv_e \varphi \iff r(\psi) \equiv_e r(\varphi)$;
 (iii) ψ heißt partiell rekursiv in φ $\iff \psi \leq_c \varphi$.

Zwischen den drei Relationen " A rekursiv in B " (i.e. " $A \leq_T B$ "), " $A \leq_e B$ " und " A rekursiv aufzählbar in B " gelten die folgenden Beziehungen und im allgemeinen sonst keine.

Satz 6: (i) A rekursiv in $B \implies A$ rekursiv aufzählbar in B ;
 (ii) $A \leq_e B \implies A$ rekursiv aufzählbar in B .

Beweis: (i) Vgl. § 8.1, Bemerkung S. 189u.

(ii) Gelte $A \leq_e B$ via z , d.h. $A = \{x \mid \exists u [\langle x, u \rangle \in W_z \ \& \ D_u \subset B]\}$. O.B.d.A. $A \neq \emptyset$. Um unter der Annahme der Rekursivität von B A aufzuzählen, durchlaufe eine Liste von W_z und entscheide für jedes auftretende $\langle x, u \rangle$, ob $D_u \subset B$. Ist dies der Fall, zähle x in die Liste für A . -

Im letzten Paragraphen definierten wir Aufzählungsoperatoren als Abbildungen Φ_Z von $2^{\mathbb{N}}$ in $2^{\mathbb{N}}$ mit $\Phi_Z(X) = \{x \mid \exists u [\langle x, u \rangle \in W_Z \ \& \ D_u \subset X] \}$. In diesem untersuchen wir die Beziehung zwischen Aufzählungsoperatoren und rechts-eindeutigen Mengen. Eine Menge $A \subset \mathbb{N}$ heißt per definitionem *rechts-eindeutig*, wenn die Menge der Paare, die von ihren Elementen kodiert werden, also $\{(x, y) \mid \langle x, y \rangle \in A\}$, eine rechtseindeutige Relation bildet.

Sei $\mathcal{P}$ die Klasse aller partiellen Funktionen einer Variablen. Eine Abbildung einer Teilmenge von $\mathcal{P}$ in $\mathcal{P}$ heißt ein *funktionaler Operator*. Ist φ eine partielle Funktion, i.e. eine rechtseindeutige Relation, so ist die Kodierung $\tau(\varphi)$ von φ nach Definition rechtseindeutig; umgekehrt ist die Dekodierung $\tau^{-1}(A)$ jeder rechtseindeutigen Menge A eine partielle Funktion. Sei nun $\mathbb{P}$ die Klasse aller rechtseindeutigen Mengen. Dann liefert τ eine bijektive kanonische Abbildung von $\mathcal{P}$ auf $\mathbb{P}$. Denn jeder partiellen Funktion φ ordnet τ die rechtseindeutige Menge $\tau(\varphi)$ zu. Verschiedenen partiellen Funktionen ordnet τ verschiedene (rechtseindeutige) Mengen zu.

Um zu sehen, daß die Abbildung surjektiv ist, betrachte eine beliebige rechtseindeutige Menge A (als Element von $\mathbb{P}$). Dann ist die Dekodierung von A , also $\tau^{-1}(A)$, eine partielle Funktion, d.h. ein Element von $\mathcal{P}$. Trivialerweise ist $A = \tau(\tau^{-1}(A))$.— Andererseits bestimmt jeder funktionale Operator Ψ eine Abbildung Γ einer Teilklasse von $\mathbb{P}$ nach $\mathbb{P}$, wobei $\Gamma = \tau\Psi\tau^{-1}$; und jede Abbildung Γ einer Teilklasse von $\mathbb{P}$ nach $\mathbb{P}$ definiert einen funktionalen Operator Ψ vermöge $\Psi := \tau^{-1}\Gamma\tau$.

Sei nun Φ eine beliebige (totale) Abbildung von $2^{\mathbb{N}}$ in $2^{\mathbb{N}}$. Dann bestimmt Φ eine Abbildung $\Phi_{\mathbb{P}}$ einer Teilklasse von $\mathbb{P}$ in $\mathbb{P}$, falls (i) $\text{domain } \Phi_{\mathbb{P}} := \Phi^{-1}(\mathbb{P}) \cap \mathbb{P}$, sowie (ii) $\Phi_{\mathbb{P}} := \Phi$ auf $\text{domain } \Phi_{\mathbb{P}} = \Phi \upharpoonright \Phi^{-1}(\mathbb{P}) \cap \mathbb{P}$. Denn da $\Phi^{-1}(\mathbb{P}) \cap \mathbb{P}$ die Klasse aller rechtseindeutigen Mengen ist, deren Bilder unter Φ ebenfalls rechtseindeutig sind, sind auch die Bilder von $\Phi_{\mathbb{P}}$ rechtseindeutig. $\Phi_{\mathbb{P}}$ ist die Restriktion von Φ auf jene rechtseindeutigen Mengen A , für welche auch $\Phi(A)$ rechtseindeutig ist. Gemäß den vorangehenden Überlegungen bestimmt $\Phi_{\mathbb{P}}$ seinerseits einen funktionalen Operator Ψ durch $\Psi := \tau^{-1}\Phi_{\mathbb{P}}\tau$. Wir sagen, daß die Abbildung Φ den funktionalen Operator Ψ *definiert*. Die Quelle von Ψ ist dann genau die Klasse jener partiellen

Funktionen φ , für die $\tau(\varphi)$ im domain $\tilde{\mathbb{P}} = \tilde{\Phi}^{-1}(\mathbb{P}) \cap \mathbb{P}$ liegt, d.h. für die $\tilde{\Phi}(\tau(\varphi))$ rechtseindeutig ist; also $\text{domain } \Psi = \tau^{-1}(\tilde{\Phi}^{-1}(\mathbb{P}) \cap \mathbb{P})$.

Definition: (a) Ψ heißt ein partiell rekursiver Operator, falls gilt:

- (i) Ψ ist ein funktionaler Operator; und
- (ii) es gibt ein z derart, daß gilt: $\tilde{\Phi}_z$ definiert Ψ .

(b) Ψ heißt ein rekursiver Operator, falls:

- (i) Ψ ist ein partiell rekursiver Operator; und
- (ii) $\text{domain } \Psi = \mathbb{P}$.

(c) Sei $\mathcal{F}$ die Klasse aller totalen Funktionen einer Variablen.

Ψ heißt ein allgemeiner rekursiver Operator, falls:

- (i) Ψ ist ein partiell rekursiver Operator;
- (ii) $\mathcal{F} \subset \text{domain } \Psi$; und
- (iii) $\Psi(\mathcal{F}) \subset \mathcal{F}$.

Ein funktionaler Operator ist demnach ein partiell rekursiver Operator, wenn er durch einen Aufzählungsoperator definiert wird. Ein partiell rekursiver Operator ist ein rekursiver Operator, wenn er auf ganz $\mathbb{P}$ definiert ist, d.h. falls er durch einen Aufzählungsoperator $\tilde{\Phi}_z$ definiert wird, für den $\tilde{\Phi}_z(\mathbb{P}) \subset \mathbb{P}$ gilt. Und ein partiell rekursiver Operator ist ein allgemeiner rekursiver Operator, wenn er für alle totalen Funktionen definiert ist und diese wieder auf totale Funktionen abbildet.

Als erstes Beispiel eines rekursiven Operators betrachten wir die identische Abbildung $\text{id}_{\mathcal{P}}$ von $\mathcal{P}$ auf $\mathcal{P}$, die durch die Identität id auf $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ definiert wird. Denn sei z der Index des Verfahrens, vermöge dessen jede Menge aufzählungs-reduzierbar auf sich selbst ist (vgl. S.212). Dann gilt $\text{id} = \tilde{\Phi}_z$. Entsprechend unseren Definitionen bestimmt $\tilde{\Phi}_z$ eine Abbildung $\tilde{\Phi}_z$ einer Teilklasse von $\mathbb{P}$ in $\mathbb{P}$ mit $\text{domain } \tilde{\Phi}_z = \tilde{\Phi}_z^{-1}(\mathbb{P}) \cap \mathbb{P} = \mathbb{P} \cap \mathbb{P} = \mathbb{P}$ und $\tilde{\Phi}_z|_{\mathbb{P}} = \tilde{\Phi}_z|_{\mathbb{P}} = \text{id}_{\mathbb{P}}$. D.h. $\tilde{\Phi}_z$ ist auf ganz $\mathbb{P}$ definiert und ordnet jeder rechtseindeutigen Menge diese selbst zu. Für den funktionalen Operator Ψ , welcher durch $\tilde{\Phi}_z$ definiert wird, gilt also $\Psi = \tau^{-1}\tilde{\Phi}_z\tau$ mit $\text{domain } \Psi = \tau^{-1}(\tilde{\Phi}_z^{-1}(\mathbb{P}) \cap \mathbb{P}) = \tau^{-1}(\mathbb{P}) = \mathcal{P}$; d.h. Ψ ordnet jeder partiellen Funktion φ den Wert $\tau^{-1}(\tilde{\Phi}_z(\tau(\varphi))) = \tau^{-1}(\tau(\varphi)) = \varphi$ zu. Somit ist $\Psi = \text{id}_{\mathcal{P}}$.

Dagegen definiert die konstante Funktion $\lambda\mathbb{A}[\mathbb{N}]$ auf $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ den leeren partiell rekursiven Operator (wobei wir die λ -Schreibweise in naheliegender Weise auf Funktionen von Mengen und Funktionen ausdehnen!). Sei dazu z ein Index des Verfahrens, welches nach überhaupt keinem Input verlangt und $\mathbb{N}$ als Outputs listet. Dann gilt $\lambda\mathbb{A}[\mathbb{N}] = \tilde{\Phi}_z$. Für die durch $\tilde{\Phi}_z$ bestimmte Abbildung folgt (i) $\text{domain } \tilde{\Phi}_z = \tilde{\Phi}_z^{-1}(\mathbb{P}) \cap \mathbb{P} = \emptyset \cap \mathbb{P} = \emptyset$, da $\mathbb{N}$ als Bild aller Zahlenpaare unter τ nicht rechtseindeutig ist; sowie (ii) $\tilde{\Phi}_z|_{\emptyset} = \tilde{\Phi}_z|_{\emptyset} = \emptyset$. Das heißt, $\tilde{\Phi}_z$ ist die leere Funktion. Für den durch $\tilde{\Phi}_z$ definierten funktionalen Operator Ψ gilt also $\Psi = \tau^{-1}\tilde{\Phi}_z\tau = \emptyset$, da $\text{domain } \Psi = \tau^{-1}(\tilde{\Phi}_z^{-1}(\mathbb{P}) \cap \mathbb{P}) = \emptyset$.

Satz 1: Sei Ψ ein partiell rekursiver Operator. Gilt $\mathcal{F} \subset \text{domain } \Psi$, so ist Ψ ein rekursiver Operator.

Beweis: Sei Ψ von Φ_z definiert, d.h. $\Psi = \tau^{-1} \Phi_z \tau$. Angenommen, Ψ ist kein rekursiver Operator, obwohl $\mathcal{F} \subset \text{domain } \Psi$. Dann gilt aufgrund einer Bemerkung auf S.217, daß $\Phi_z(P) \notin P$; d.h. es gibt ein $D' \in P$, so daß $\Phi_z(D') \notin P$. Nach §9.1, Satz 5 (b) gibt es ein endliches $D \subset D'$, also insbesondere $D \in P$, mit $\Phi_z(D) \notin P$. Da D rechtseindeutig, kann D zu einem B mit $B = \tau(f)$ für eine totale Funktion f erweitert werden. Aus $D \subset B$ folgt nach §9.1, Satz 5 (a), $\Phi_z(D) \subset \Phi_z(B)$, weshalb auch $\Phi_z(B)$ nicht rechtseindeutig ist - im Widerspruch zu $\mathcal{F} \subset \text{domain } \Psi$!

Korollar: Jeder allgemeine rekursive Operator ist ein rekursiver Operator.

Beweis: Sei Ψ ein allgemeiner rekursiver Operator, i.e. ein partiell rekursiver Operator mit $\mathcal{F} \subset \text{domain } \Psi$. Dann folgt die Behauptung aus Satz 1.

Wir beweisen nun als hauptsächliches Resultat dieses Paragraphen den **Hauptsatz für Operatoren**. Dieser zeigt, daß wenn wir uns auf Inputs aus $\mathcal{F}$ beschränken, jeder partiell rekursive Operator zu einem rekursiven Operator erweitert werden kann. Als ein Satz über partiell rekursive Operatoren steht dieses Ergebnis im Gegensatz zu Satz 4 aus §1.2 (S.19) über die Nichterweiterbarkeit aller partiell rekursiven Funktionen. Der Satz gilt uniform und versorgt uns daher mit einer effektiven Aufzählung der rekursiven Operatoren auf $\mathcal{F}$. Mithin steht er ebenfalls im Gegensatz zu Satz 3 aus §1.4 (S.27) über die Nichtaufzählbarkeit der rekursiven Funktionen.

Satz 2 (Hauptsatz für Operatoren): Es gibt eine rekursive Funktion $\mathcal{G}$ derart, daß für jedes z , für das Φ_z den partiell rekursiven Operator Ψ definiert, $\Phi_{\mathcal{G}(z)}$ einen rekursiven Operator Ψ' definiert, so daß für jedes (totale) f gilt: $f \in \text{domain } \Psi \Rightarrow \Psi'(f) = \Psi(f)$.

Beweis: Wir geben, bevor wir den Beweis formal ausführen, zuerst eine intuitive Darstellung, - auch wenn wir dann um technischer Einfachheit willen bei der ausführlichen Konstruktion einen anderen Weg einschlagen werden. - Nach einer Bemerkung zur relativen rekursiven Aufzählbarkeit in §8.1 (S. 190o.) können wir ausgehend von einer beliebigen Aufzählung einer totalen Funktion die Elementschaft in dieser testen. Daher können wir aus einer beliebigen Aufzählung von $\tau(f)$ eine Aufzählung von $\tau(f)$ in der kanonischen Ordnung $\langle 0, f(0) \rangle, \langle 1, f(1) \rangle, \dots$ gewinnen. Indem wir auf diese Folge Φ_z anwenden, gelangen wir zu $\Phi_z(\tau(f))$ in einer bestimmten Reihenfolge. In bezug auf diese kann $\Phi_z(\tau(f))$ rechtseindeutig gemacht werden. Um $\Phi_{\mathcal{G}(z)}$ zu gewinnen, führen wir zuerst diese drei Operationen hintereinander aus:
 (i) Aufzählung des Inputs in der kanonischen Ordnung; (ii) Anwendung von Φ_z ;
 (iii) Rechtseindeutigmachen des Outputs.

dadurch wird ein wohldefinierter Operator von $\mathbb{P}$ in $\mathbb{P}$ festgelegt. Dazu fügen wir die weitere Bedingung, daß für jeden beliebigen nicht rechtseindeutigen Input der Output N sein soll. Der Output ist somit unabhängig von der Reihenfolge, in der die Inputs geliefert werden, und wir erhalten einen wohldefinierten Operator von 2^N in 2^N mit den gewünschten Eigenschaften.-

Zum formalen Beweis sei f'' eine feste (entsprechend einem der Korollare zum Hauptsatz über rekursiv aufzählbare Mengen existierende) rekursive Funktion derart, daß für alle x gilt: $\text{range } \mathcal{G}_{f'',(x)} = \text{domain } \mathcal{G}_x$, $\mathcal{G}_{f'',(x)}$ injektiv, und $\text{domain } \mathcal{G}_{f'',(x)}$ ist ein Anfangsabschnitt von $\mathbb{N}$ (vgl. §1.4, S.26). Sei z beliebig gegeben. Betrachte W_z in der Reihenfolge aufgezählt, wie sie durch $\mathcal{G}_{f'',(x)}$ festgelegt ist. Ist $v \in W_z$, so sagen wir, daß u in W_z vor v kommt, wenn $u \in W_z$ und u in der gegebenen Reihenfolge vor v auftritt; d.h. falls $\mathcal{G}_{f'',(z)}(u)$ existiert und $\mathcal{G}_{f'',(z)}^{-1}(u) < \mathcal{G}_{f'',(z)}^{-1}(v)$ gilt. Betrachte die Menge $\{ \langle \langle x, y \rangle, t \rangle \mid D_t \text{ ist rechtseindeutig} \ \& \ \exists s [D_s \subset D_t \ \& \ \langle \langle x, y \rangle, s \rangle \in W_z \ \& \ \forall s' \forall y' [\langle \langle x, y' \rangle, s' \rangle \text{ kommt in } W_z \text{ vor } \langle \langle x, y \rangle, s \rangle \Rightarrow D_{s'} \cup D_t \text{ ist nicht rechtseindeutig}]]] \}$, d.h. die Menge aller kodierten Paare $((x, y), t)$, deren zweite Komponenten kanonische Indizes solcher rechtseindeutigen endlichen Mengen sind, welche eine endliche Teilmenge mit dem kanonischen Index s so enthalten, daß in der Aufzählung von W_z $\langle \langle x, y \rangle, s \rangle$ das erste Element ist derart, daß $D_s \cup D_t$ rechtseindeutig ist. Diese Menge ist offenbar rekursiv aufzählbar, wobei ihr Index uniform von z abhängt. Wähle σ als eine rekursive Funktion, daß $W_{\sigma(z)}$ gleich der Menge ist. Wir zeigen, daß der $\sigma(z)$ entsprechende Aufzählungsoperator $\Phi_{\sigma(z)}$ die gewünschten Eigenschaften besitzt. Dazu beweisen wir zuerst ein Lemma.

Lemma: $\langle \langle x, y \rangle, t \rangle \in W_{\sigma(z)} \ \& \ D_t \subset D_{t_1} \ \& \ D_{t_1} \text{ rechtseindeutig} \Rightarrow \langle \langle x, y \rangle, t_1 \rangle \in W_{\sigma(z)}$.

Beweis des Lemmas: Angenommen, es gilt $\langle \langle x, y \rangle, t \rangle \in W_{\sigma(z)}$, $D_t \subset D_{t_1}$, D_{t_1} rechtseindeutig, und $\langle \langle x, y \rangle, t_1 \rangle \notin W_{\sigma(z)}$. Da $\langle \langle x, y \rangle, t \rangle \in W_{\sigma(z)}$, existiert ein s derart, daß $D_s \subset D_t$, $\langle \langle x, y \rangle, s \rangle \in W_z$ und $\forall s' \forall y' [\langle \langle x, y' \rangle, s' \rangle \text{ kommt in } W_z \text{ vor } \langle \langle x, y \rangle, s \rangle \Rightarrow D_{s'} \cup D_t \text{ ist nicht rechtseindeutig}]$. Betrachte D_s . Da D_t nach Voraussetzung rechtseindeutig, $D_s \subset D_{t_1}$ (wegen $D_s \subset D_t \subset D_{t_1}$), $\langle \langle x, y \rangle, s \rangle \in W_z$, und $\forall s' \forall y' [\langle \langle x, y' \rangle, s' \rangle \text{ vor } \langle \langle x, y \rangle, s \rangle \text{ in } W_z \Rightarrow D_{s'} \cup D_{t_1} \text{ ist nicht rechtseindeutig}]$ (- wegen $D_s \cup D_{t_1} \supset D_s \cup D_t$, wobei letztere Menge nicht rechtseindeutig), gilt $\langle \langle x, y \rangle, t_1 \rangle \in W_{\sigma(z)}$ - im Widerspruch zur Voraussetzung, daß $\langle \langle x, y \rangle, t_1 \rangle \notin W_{\sigma(z)}$. Damit ist das Lemma bewiesen.-

Als nächstes zeigen wir, daß $\Phi_{\sigma(z)}$ einen rekursiven Operator definiert. Indukt: angenommen, dies ist nicht der Fall. Dann gilt $\Phi_{\sigma(z)}(\mathbb{P}) \neq \mathbb{P}$, d.h. es gibt ein rechtseindeutiges A derart, daß $\Phi_{\sigma(z)}(A) = \{ x \mid \exists u [\langle x, u \rangle \in W_{\sigma(z)} \ \& \ \langle x, u \rangle \in A] \}$ nicht rechtseindeutig ist. Das heißt, es gibt $\langle x, y_1 \rangle, \langle x, y_2 \rangle \in \Phi_{\sigma(z)}(A)$ mit $y_1 \neq y_2$. Nach Definition von $\Phi_{\sigma(z)}(A)$ existieren sodann t_1 und t_2 mit $\langle \langle x, y_1 \rangle, t_1 \rangle \in W_{\sigma(z)}$ und $D_{t_1} \subset A$, sowie $\langle \langle x, y_2 \rangle, t_2 \rangle \in W_{\sigma(z)}$ und $D_{t_2} \subset A$ (mit $y_1 \neq y_2$).

Nach Definition von $W_{G(z)}$ gibt es also s_1 mit $D_{s_1} \subset D_{t_1}$, $\langle\langle x, y_1 \rangle, s_1 \rangle \in W_z$ und $\forall s' \forall y' [\langle\langle x, y_1 \rangle, s' \rangle \text{ vor } \langle\langle x, y_1 \rangle, s_1 \rangle \text{ in } W_z \Rightarrow D_{s'} \cup D_{t_1} \text{ ist nicht rechts-eindeutig}]$; sowie ein s_2 mit $D_{s_2} \subset D_{t_2}$, $\langle\langle x, y_2 \rangle, s_2 \rangle \in W_z$ und $\forall s' \forall y' [\langle\langle x, y_2 \rangle, s' \rangle \text{ vor } \langle\langle x, y_2 \rangle, s_2 \rangle \in W_z \Rightarrow D_{s'} \cup D_{t_2} \text{ ist nicht rechts-eindeutig}]$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit gelte $\langle\langle x_2, y_1 \rangle, s_1 \rangle \text{ vor } \langle\langle x, y_2 \rangle, s_2 \rangle \text{ in } W_z$. Dann ist $D_{s_1} \cup D_{t_2}$ nicht rechts-eindeutig. Wegen $D_{s_1} \subset D_{t_1}$ und folglich $D_{s_1} \cup D_{t_2} \subset D_{t_1} \cup D_{t_2}$ ist dann auch $D_{t_1} \cup D_{t_2}$ nicht rechts-eindeutig; folglich, da $D_{t_1} \cup D_{t_2} \subset A$, A nicht rechts-eindeutig - im Widerspruch zur Voraussetzung!

Bleibt zu zeigen, daß für jedes totale $f \in \text{domain } \Psi$ gilt: $\Psi'(f) = \Psi(f)$. Da Ψ von Φ_z definiert, d.h. $\Psi = \tau^{-1} \Phi_z \tau$, ist $\text{domain } \Psi = \tau^{-1}(\Phi_z^{-1}(P) \cap P)$. Dann gilt $f \in \text{domain } \Psi$ genau dann, wenn $\tau(f) \in \Phi_z^{-1}(P) \cap P$, d.h., da $\tau(f)$ rechts-eindeutig, wenn $\Phi_z(\tau(f))$ rechts-eindeutig ist. Sei also $\Phi_z(\tau(f))$ rechts-eindeutig. Für den durch $\Phi_{G(z)}$ definierten Operator Ψ' gilt $\Psi' = \tau^{-1} \Phi_{G(z)} \tau$ mit $\Phi_{G(z)} P = \Phi_{G(z)} \big| \Phi_{G(z)}^{-1}(P) \cap P$. Für $\Psi'(f) = \Psi(f)$ genügt es also zu zeigen, daß

$\Phi_{G(z)}(\tau(f)) = \Phi_z(\tau(f))$. Wir zeigen dazu die Inklusion in beiden Richtungen.
" $\subset$ ": Sei $\langle\langle x, y \rangle, t \rangle \in \Phi_{G(z)}(\tau(f)) = \{x \mid \exists u [\langle\langle x, u \rangle \in W_{G(z)} \text{ \& } D_u \subset \tau(f)] \}$. Dann gibt es ein t mit $\langle\langle x, y \rangle, t \rangle \in W_{G(z)}$ und $D_t \subset \tau(f)$. Nach Definition von $W_{G(z)}$ gibt es ein s mit $D_s \subset D_t$, also insbesondere $D_s \subset \tau(f)$, und $\langle\langle x, y \rangle, s \rangle \in W_z$. Also $\langle\langle x, y \rangle \in \Phi_z(\tau(f)) = \{x \mid \exists u [\langle\langle x, u \rangle \in W_z \text{ \& } D_u \subset \tau(f)] \}$.
" $\supset$ ": Sei $\langle\langle x, y \rangle \in \Phi_z(\tau(f))$. Dann gibt es ein s derart, daß $\langle\langle x, y \rangle, s \rangle \in W_z$ und $D_s \subset \tau(f)$. Wähle das erste solche s , das in der kanonischen Aufzählung von W_z erscheint. Da $\tau(f)$ rekursiv, und folglich $D_s \subset \tau(f)$ effektiv entscheidbar, ist dieses effektiv zu ermitteln. Sei $S = \{s_1, \dots, s_k\} = \{s' \mid \exists y' [\langle\langle x, y' \rangle, s' \rangle \text{ kommt in } W_z \text{ vor } \langle\langle x, y \rangle, s \rangle] \}$, also die endliche Menge aller zweiten Komponenten jener kodierten Paare in W_z , deren erste Komponente aus einem kodierten Paar mit x als erster Komponente besteht und die vor $\langle\langle x, y \rangle, u \rangle$ kommen. Da $\Phi_z(\tau(f))$ als rechts-eindeutig vorausgesetzt ist, gilt $D_{s_i} \not\subset \tau(f)$ für alle i mit $1 \leq i \leq k$. Definiere D_t so, daß $D_t \subset \tau(f)$ und $\text{domain } D_t = \text{domain } D_s \cup (\bigcup_{i=1}^k \text{domain } D_{s_i})$. Insbesondere D_t rechts-eindeutig. Da $D_{s_i} \not\subset \tau(f)$ ($1 \leq i \leq k$), ist $D_{s_i} \cup D_t$ nicht rechts-eindeutig ($1 \leq i \leq k$). Nach Definition von $W_{G(z)}$ gilt also $\langle\langle x, y \rangle, t \rangle \in W_{G(z)}$. (Falls $S = \emptyset$, definiere $D_t := D_s$, woraus ebenfalls $\langle\langle x, y \rangle, t \rangle \in W_{G(z)}$ folgt.) Damit $\langle\langle x, y \rangle \in \{x \mid \exists u [\langle\langle x, u \rangle \in W_{G(z)} \text{ \& } D_u \subset \tau(f)] \} = \Phi_{G(z)}(\tau(f))$. - Damit ist der Satz auch formal bewiesen.

In einem Teil der Literatur werden funktionale Operatoren ausschließlich als Abbildungen von $\mathcal{F}$ in $\mathcal{P}$ - anstatt von $\mathcal{P}$ in $\mathcal{P}$ - untersucht. Mit dieser Einschränkung kann aufgrund des Hauptsatzes jeder partiell rekursive Operator zu einem rekursiven Operator erweitert werden; wobei diese Möglichkeit gerade der Grund für die Einschränkung ist.

9.3 Charakterisierung von $\leq_T$, $\leq_{tt}$, $\leq_m$ und $\leq_1$ durch $\leq_e$

Wir benützen nun den Hauptsatz für Operatoren, um die verschiedenen von uns behandelten Reduzierbarkeitsbegriffe mithilfe funktionaler Operatoren zu charakterisieren. Per definitionem hieß eine partiell rekursive Funktion ψ aufzählungs-reduzierbar auf die partiell rekursive Funktion φ , falls es für die entsprechenden Kodierungen $\tau(\psi)$ und $\tau(\varphi)$ gilt. Angewandt auf die charakteristischen Funktionen c_A und c_B zweier Mengen A und B, bedeutet dies: $c_A \leq_e c_B \iff$ eine beliebige Aufzählung von $\tau(c_B)$ liefert eine Aufzählung von $\tau(c_A)$. Wie der nächst Satz zeigt, ist dies genau dann der Fall, wenn A Turing-reduzierbar auf B ist. Das heißt: A ist genau dann rekursiv in B, wenn eine beliebige Aufzählung der charakteristischen Funktion von B eine Aufzählung der charakteristischen Funktion von A liefert. Wir begründen dies vorab wieder intuitiv. Angenommen, A ist rekursiv in B. Betrachte eine beliebige Aufzählung der charakteristischen Funktion c_B von B. Dann haben wir auch ein Entscheidungsverfahren für B: gehe nämlich für beliebiges x die Liste von c_B durch, bis das Paar mit x als erster Komponente erscheint. Ist dessen zweite Komponente 1, so gilt $x \in B$; ist sie 0, so $x \notin B$. Nach Voraussetzung haben wir nun auch ein Entscheidungsverfahren für A. Daher läßt sich c_A aufzählen. - Sei umgekehrt c_A aufzählungs-reduzierbar auf c_B , und B entscheidbar. Dann läßt sich c_B aufzählen, und folglich - nach Voraussetzung - auch c_A . Mithilfe der Aufzählung von c_A läßt sich sodann wieder A entscheiden. - Daß der formale Beweis demgegenüber unverhältnismäßig kompliziert erscheint, liegt daran, daß er auf die relativ umständlichen formalen Charakterisierungen sowohl von $\leq_T$ als auch von $\leq_e$ zurückgreift.

Satz 1: $A \leq_T B \iff c_A \leq_e c_B$.

Beweis: " $\implies$ ": Gelte $A \leq_T B$. Dann ist $c_A = \mathcal{G}_z^B$ für ein geeignetes z, d.h. $c_A = \{(x,y) \mid \exists u,v [\langle x,y,u,v \rangle \in W_z \text{ \& } D_u \subset B \text{ \& } D_v \subset \bar{B}] \}$. Für jedes u,v läßt der kanonische Index der endlichen Menge $(D_u \times \{1\}) \cup (D_v \times \{0\})$ sich effektiv aus u und v bestimmen. Das heißt, es existiert eine rekursive Funktion h von zwei Variablen, so daß für alle u,v $D_{h(u,v)} = (D_u \times \{1\}) \cup (D_v \times \{0\})$. Betrachte nun die Menge W_z . Da W_z rekursiv aufzählbar, gilt dies auch für die Menge $\{ \langle x,y, h(u,v) \rangle \mid \langle x,y,u,v \rangle \in W_z \}$, und folglich auch für $\{ \langle w,t \rangle \mid \exists x \exists y \exists u \exists v [w = \langle x,y \rangle \text{ \& } t = h(u,v) \text{ \& } \langle x,y,u,v \rangle \in W_z] \}$. Da letztere uniform von z abhängt, gibt es eine rekursive Funktion g_1 derart, daß für alle z: $W_{g_1(z)} = \{ \langle w,t \rangle \mid \exists x \exists y \exists u \exists v [w = \langle x,y \rangle \text{ \& } t = h(u,v) \text{ \& } \langle x,y,u,v \rangle \in W_z] \}$. Dann folgt für alle $\tilde{x}$: $\tilde{x} = \langle x,y \rangle \in \tau(c_A) \iff (x,y) \in c_A \iff \exists u \exists v [\langle x,y,u,v \rangle \in W_z \text{ \& } D_u \subset B \text{ \& } D_v \subset \bar{B}] \iff \exists u \exists v [\langle x,y,u,v \rangle \in W_z \text{ \& } (D_u \times \{1\}) \cup (D_v \times \{0\}) = D_{h(u,v)} \subset c_{c_B}] \iff \exists u \exists v [\langle x,y,u,v \rangle \in W_z \text{ \& } t = h(u,v) \text{ \& } D_{h(u,v)} \subset \tau(c_B)] \iff \exists u [\langle \langle x,y \rangle, u \rangle \in W_{g_1(z)} \text{ \& } D_u \subset \tau(c_B)]$; also per definitionem $c_A \leq_e c_B$ via $g_1(z)$.

" $\Leftarrow$ ": Gelte $c_A \leq_e c_B$ via z , i.e. $\tau(c_A) \leq_e \tau(c_B)$.

Zu zeigen: $A \leq_T B$; d.h. es gibt ein z' derart, daß

$$c_A = \mathcal{G}_{z'}^B = \{ \langle x, y \rangle \mid \exists u, v [\langle x, y, u, v \rangle \in W_{z'} \text{ \& } D_u \subset B \text{ \& } D_v \subset \bar{B}] \}.$$

Nach dem Hauptsatz gilt $\tau(c_A) = \hat{\Phi}_{\mathcal{G}(z)}(\tau(c_B))$, wobei $\hat{\Phi}_{\mathcal{G}(z)}$ einen rekursiven Operator definiert.

Betrachte die Menge $\mathbb{N} \times \{0, 1\}$ aller kodierten Paare mit 0 oder 1 als zweiter Komponente (rekursiv!). Da für jedes t entscheidbar ist, ob $D_t \subset \mathbb{N} \times \{0, 1\}$, ist die Menge $\{ \langle \langle x, y \rangle, t \rangle \mid \langle \langle x, y \rangle, t \rangle \in W_{\mathcal{G}(z)} \text{ \& } D_t \subset \mathbb{N} \times \{0, 1\} \}$ rekursiv aufzählbar, wobei ihr rekursiv aufzählbarer Index uniform von z abhängt. D.h. es gibt eine rekursive Funktion θ derart, daß

$$W_{\theta(z)} = \{ \langle \langle x, y \rangle, t \rangle \mid \langle \langle x, y \rangle, t \rangle \in W_{\mathcal{G}(z)} \text{ \& } D_t \subset \mathbb{N} \times \{0, 1\} \} \text{ \& } W_{\theta(z)} \text{ unendlich.}$$

Sei $\langle \langle x_1, y_1 \rangle, t_1 \rangle, \langle \langle x_2, y_2 \rangle, t_2 \rangle, \dots$ eine effektive Liste der Elemente von $W_{\theta(z)}$. Nach dem Lemma im Beweis des Hauptsatzes in §9.2 gilt, daß falls $\langle \langle x, y \rangle, t \rangle \in W_{\mathcal{G}(z)}$, auch $\langle \langle x, y \rangle, t' \rangle \in W_{\mathcal{G}(z)}$ für alle t' mit $D_t \subset D_{t'}$ und $D_{t'}$ rechtseindeutig. Wir geben Vorschriften für eine neue effektive Liste (mit Wiederholungen) von $W_{\theta(z)}$ wie folgt:

Stufe 1: Liste $\langle \langle x_1, y_1 \rangle, t_1 \rangle$ und gehe über zu Stufe 2.

Stufe 2: Liste $\langle \langle x_2, y_2 \rangle, t_2 \rangle$ und sodann $\langle \langle x_2, y_2 \rangle, t' \rangle$ für alle t' mit $D_{t_2} \subset D_{t'}$, $D_{t'} \subset \mathbb{N} \times \{0, 1\}$, $\text{domain } D_{t'} = \text{domain } D_{t_2} \cup \text{domain } D_{t_1}$ und $D_{t'}$ rechtseindeutig. Gehe über zu Stufe 3.

⋮

Stufe n : Liste $\langle \langle x_n, y_n \rangle, t_n \rangle$ und sodann $\langle \langle x_n, y_n \rangle, t' \rangle$ für alle t' mit $D_{t_n} \subset D_{t'}$, $D_{t'} \subset \mathbb{N} \times \{0, 1\}$, $\text{domain } D_{t'} = \bigcup_{k=1}^n \text{domain } D_{t_k}$, und $D_{t'}$ rechtseindeutig. Dann gehe über zu Stufe $n+1$.

⋮

Wir bezeichnen die aufeinanderfolgenden Glieder dieser neuen Liste von $W_{\theta(z)}$ mit $\langle \langle x_1, y_1 \rangle, t_1 \rangle, \langle \langle x_2, y_2 \rangle, t_2 \rangle, \dots$.

Betrachte nun für jedes t die endliche Menge aller ersten Komponenten von kodierten geordneten Paaren aus D_t , deren zweite Komponente 1 ist; sowie die endliche Menge aller ersten Komponenten von kodierten geordneten Paaren aus D_t , deren zweite Komponente 0 ist. Da D_t endlich, gibt es rekursive Funktionen h_1 und h_2 derart, daß $D_{h_1(t)} = \{ x \mid \langle x, 1 \rangle \in D_t \}$ sowie $D_{h_2(t)} = \{ x \mid \langle x, 0 \rangle \in D_t \}$.

Sei $C = \{ \langle x, y, u, v \rangle \mid \exists t [\langle \langle x, y \rangle, t \rangle \in W_{\theta(z)} \text{ \& } u = h_1(t) \text{ \& } v = h_2(t)] \}$.

Um eine effektive Liste für C zu erhalten, geht man die neue Liste für

$W_{\theta(z)}$ durch, berechnet für jedes auftretende $\langle \langle x_i, y_i \rangle, t_i \rangle$ die Werte $u_i := h_1(t_i)$, $v_i := h_2(t_i)$, und fügt das kodierte Quadrupel $\langle x_i, y_i, u_i, v_i \rangle$ zur Liste von C hinzu ($i=1, 2, \dots$). Dann lautet die Liste: $\langle x_1, y_1, u_1, v_1 \rangle, \langle x_2, y_2, u_2, v_2 \rangle, \dots$. (Rogers(1967) benützt nun diese, um unter Berücksichtigung der Verträglichkeitsbedingung effektiv eine reguläre Teilmenge C^* von C aufzuzählen, so daß - für $C^* = W_{\theta(z')}$ - $A \leq_T B$ via z' . Da wir aber wie gewöhnlich auf unsere allgemeinere Präzisierung $\leq_w$ über b e -

ie b i g e rekursiv aufzählbare Mengen Bezug nehmen, können wir auf diesen Übergang verzichten und sofort $A \leq_T B$ via einen Index z' von C selbst beweisen. Dadurch erübrigt sich zudem Rogers' Fallunterscheidung unter " $\leq$ " des folgenden Beweises (op. cit. S.153.) Sei g_2 eine rekursive Funktion mit

$g_2(z) = C$. Wir zeigen, daß $c_A = \mathcal{G}_{g_2}(z)$.
 "": Sei $(x,y) \in \mathcal{G}_{g_2}(z)$, d.h. es gibt u und v derart, daß $\langle x,y,u,v \rangle \in W_{g_2(z)}$ und $D_u \subset B$, $D_v \subset \bar{B}$. Dann gilt $\langle x,y,u,v \rangle \in C$, d.h. $\langle \langle x,y \rangle, t \rangle \in W_{\theta(z)}$ mit $u = h_1(t)$ und $v = h_2(t)$. Folglich $D_u = D_{h_1}(t) = \{x \mid \langle x,t \rangle \in D_t\} \subset B$ und $D_v = D_{h_2}(t) = \{x \mid \langle x,t \rangle \in D_t\} \subset \bar{B}$. Da weiter $\langle \langle x,y \rangle, t \rangle \in W_{\theta(z)}$ und $D_t \subset \mathbb{N} \times \{0,1\}$, gilt $D_t \subset \tau(c_B)$ (nämlich $\langle p,q \rangle \in D_t \Rightarrow \langle p,q \rangle = \langle p,l \rangle \in D_t$ oder $\langle p,q \rangle = \langle p,0 \rangle \in D_t \Rightarrow p \in D_u$ oder $p \in D_v \Rightarrow p \in B$ oder $p \in \bar{B} \Rightarrow \langle p,l \rangle \in \tau(c_B)$ oder $\langle p,0 \rangle \in \tau(c_B) \Rightarrow \langle p,q \rangle \in \tau(c_B)$). Also $\langle x,y \rangle \in \{x \mid \exists u [\langle x,u \rangle \in W_{\theta(z)} \text{ \& } D_u \subset \tau(c_B)]\} = \mathcal{G}_{g_2}(z)(\tau(c_B)) = \tau(c_A)$, d.h. $(x,y) \in c_A$.
 "": Sei $(x,y) \in c_A$, d.h. $\langle x,y \rangle \in \tau(c_A) = \mathcal{G}_{g_2}(z)(\tau(c_B))$. Dann gibt es ein t derart, daß $\langle \langle x,y \rangle, t \rangle \in W_{\theta(z)}$ und $D_t \subset \tau(c_B) \subset \mathbb{N} \times \{0,1\}$. Daher muß es in der oben konstruierten effektiven Liste von $W_{\theta(z)}$ eine Stufe n geben derart, daß $\langle \langle x,y \rangle, t \rangle$ in $W_{\theta(z)}$ gelistet wird, wobei $x = x_n$, $y = y_n$, $D_t \subset D_{t_1}$, $D_{t_1} \subset \tau(c_B)$ und $\text{domain } D_{t_1} = \bigcup_{k=1}^n \text{domain } D_{t_k}$. Sei $\langle \langle x,y \rangle, t \rangle$ das m -te Element in der Liste von $W_{\theta(z)}$, also $\langle \langle x'_m, y'_m \rangle, t'_m \rangle = \langle \langle x,y \rangle, t \rangle$, und $\text{domain } D_{t_1} = \bigcup_{k=1}^m \text{domain } D_{t_k}$. Auf Stufe m wird $\langle x'_m, y'_m, u'_m, v'_m \rangle$ in C gelistet. Dann ist $\langle x,y, \langle x'_m, y'_m \rangle, \langle u'_m, v'_m \rangle \rangle \in C = W_{g_2}(z)$ mit $D_{u'_m} \subset B$ und $D_{v'_m} \subset \bar{B}$, also $(x,y) \in \mathcal{G}_{g_2}(z)$.
 Also $A \leq_T B$ via $z' = g_2(z)$. Q.e.d.

Lemma: Für beliebige totale Funktionen f und g gilt: $f \leq_T g \Leftrightarrow f \leq_e g$.

Beweis: Wir zeigen zuerst, daß für totale Funktionen f gilt:

$$(*) f \leq_e c_{\tau(f)}; \text{ i.e. } \tau(f) \leq_e \tau(c_{\tau(f)}).$$

Zu " $\tau(f) \leq_e \tau(c_{\tau(f)})$ ": Für die offenbar rekursiv aufzählbare Menge $W_z := \{\langle x,y \rangle \mid y = 2^{\langle x,1 \rangle}\}$ gilt (für alle x): $x \in \tau(f) \Leftrightarrow \langle x,1 \rangle \in c_{\tau(f)} \Leftrightarrow \langle x,1 \rangle \in \tau(c_{\tau(f)}) \Leftrightarrow \{\langle x,1 \rangle\} = D_2 \langle x,1 \rangle \subset \tau(c_{\tau(f)}) \Leftrightarrow \exists y [\langle x,y \rangle \in W_z \text{ \& } D_y \subset \tau(c_{\tau(f)})]$; d.h. $\tau(f) \leq_e \tau(c_{\tau(f)})$ via z .

Zu " $\tau(c_{\tau(f)}) \leq_e \tau(f)$ ": Definiere die offenbar rekursiv aufzählbare Menge $W_{z_1} := \{\langle x,y \rangle \mid \pi_2(x) = 1 \text{ \& } y = 2^{\pi_1(x)}\} \cup \{\langle x,y \rangle \mid \exists z [y = 2^z \text{ \& } \pi_1(z) = \pi_1(\pi_1(x)) \text{ \& } \pi_2(z) \neq \pi_2(\pi_1(x)) \text{ \& } \pi_2(x) = 0]\}$.

Dann unterscheide für beliebiges x drei Fälle:

1. Fall: $\pi_2(x) = 0$. Dann gilt: $x = \langle \pi_1(x), 0 \rangle \in \tau(c_{\tau(f)}) \Leftrightarrow \pi_1(x) \in \tau(f) \Leftrightarrow \exists v \in \tau(f) [\pi_1(v) = \pi_1(\pi_1(x)) \text{ \& } \pi_2(v) \neq \pi_2(\pi_1(x))] \text{ ((da } f \text{ total))}$
 $\Leftrightarrow \exists y \exists v [D_y \subset \tau(f) \text{ \& } y = 2^v \text{ \& } \pi_1(v) = \pi_1(\pi_1(x)) \text{ \& } \pi_2(v) \neq \pi_2(\pi_1(x))]$
 $\Leftrightarrow \exists y [\langle x,y \rangle \in W_{z_1} \text{ \& } D_y \subset \tau(f)] \text{ ((wobei in der letzten Äquivalenz "}\Rightarrow\text{" klar, und "}\Leftarrow\text{" aufgrund der Voraussetzung } \pi_2(x) = 0 \text{))}$

2. Fall: $\pi_2(x) = 1$. Dann gilt: $x = \langle \pi_1(x), 1 \rangle \in \tau(c_{\tau(f)}) \Leftrightarrow \pi_1(x) \in \tau(f) \Leftrightarrow$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \exists y [y = 2^{\pi_1(x)} \ \& \ D_y \subset \tau(f)] \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \exists y [\langle x, y \rangle \in W_Z, \ \& \ D_y \subset \tau(f)] \quad (" \Leftarrow " \text{ wegen } \pi_2(x) = 1). \end{aligned}$$

3. Fall: $\pi_2(x) > 1$. Dann gilt: $x \notin \tau(c_{\tau(f)})$ & $\neg \exists y [\langle x, y \rangle \in W_Z]$, und damit trivialerweise die fragliche Äquivalenz.

Also $\tau(c_{\tau(f)}) \leq_e \tau(f)$ via z' . -

Mit (+) folgt nun schnell die Behauptung. Denn nach Definition gilt $f \leq_T g \Leftrightarrow \tau(f) \leq_T \tau(g)$. Letzteres ist nach Satz 1 äquivalent mit $c_{\tau(f)} \leq_e c_{\tau(g)}$, d.h. per definitionem mit $\tau(c_{\tau(f)}) \leq_e \tau(c_{\tau(g)})$. Nach (+) ist dies äquivalent mit $\tau(f) \leq_e \tau(g)$, und damit per def. mit $f \leq_e g$. q.e.d.

Zusammen mit §9.1, Satz 1 (11), liefert Satz 1 einen neuen Beweis der Transitivität von $\leq_T$ (vgl. §7.6, Satz 3). Denn mit $A \leq_T B$ und $B \leq_T C$ gilt nach Satz 1 auch $c_A \leq_e c_B$ und $c_B \leq_e c_C$, also nach §9.1 $c_A \leq_e c_C$ und somit, wieder mit Satz 1, $A \leq_T C$. -

Nach Satz 1 ist die T-Reduzierbarkeitsordnung isomorph zu einer Unterordnung der e-Reduzierbarkeitsordnung; man erhält den Isomorphismus, indem man den T-Grad einer Menge A mit dem e-Grad ihrer charakteristischen Funktion identifiziert. Definiere $I: \{d_T(A) \mid A \in 2^{\mathbb{N}}\} \rightarrow \{d_e(A) \mid A \in 2^{\mathbb{N}}\}$ mit $I(d_T(A)) := d_e(c_A) = d_e(\tau(c_A))$. Dann gilt: $d_T(A) \leq_T d_T(B) \Leftrightarrow A \leq_T B \Leftrightarrow c_A \leq_e c_B \Leftrightarrow d_e(c_A) \leq_e d_e(c_B) \Leftrightarrow I(d_T(A)) \leq_e I(d_T(B))$. - Einem Resultat von Medvedev zufolge ist I nicht surjektiv, d.h. diese Unterordnung fällt nicht mit der gesamten e-Reduzierbarkeitsordnung zusammen.

Die folgende Charakterisierung der Turing-Reduzierbarkeit ergibt sich unmittelbar aus dem Hauptsatz und Satz 1.

Satz 2: $A \leq_T B \Leftrightarrow$ es gibt einen rekursiven Operator, der c_B auf c_A abbildet.

Beweis: Nach Satz 1 gilt: $A \leq_T B \Leftrightarrow c_A \leq_e c_B \Leftrightarrow \exists z [\Phi_z(\tau(c_B)) = \tau(c_A)]$.

Letzteres aber ist genau dann der Fall, wenn für den durch Φ_z definierten partiell rekursiven Operator $\Psi = \tau^{-1} \Phi_z \tau$ mit $\Phi_z: \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}$, $\Phi_z(X) := \Phi_z(X)$ gilt: $\Psi(c_B) = c_A$. Denn: $\Phi_z \tau(c_B) = c_A \Leftrightarrow \tau^{-1}(\Phi_z(\tau(c_B))) = c_A \Leftrightarrow \Phi_z(\tau(c_B)) = \tau(c_A) \Leftrightarrow \Phi_z(\tau(c_B)) = \tau(c_A)$. Nach dem Hauptsatz kann nun Φ_z zu einem rekursiven Operator Φ erweitert werden, daß $\Psi(c_B) = \Psi(c_B) = c_A$.

Muß eine charakteristische Funktion, welche durch einen rekursiven Operator auf eine andere abgebildet wird, auch durch einen allgemeinen rekursiven Operator auf jene abgebildet werden können? Der nächste Satz beantwortet diese Frage negativ, indem er zeigt, daß die Existenz eines allgemeinen rekursiven Operators mit tt-Reduzierbarkeit zusammenfällt. Der Satz ist eine andere Fassung von Satz 3 aus §8.4.

Satz 3 (Nerode): $A \leq_{tt} B \iff$ es gibt einen allgemeinen rekursiven Operator, der c_B auf c_A abbildet.

Beweis: " $\Rightarrow$ ": Gelte $A \leq_{tt} B$. Dann gilt nach §8.4, Satz 3, für ein geeignetes z , daß $c_A = \mathcal{G}_z^B$ und für alle X $\mathcal{G}_z^X$ eine charakteristische Funktion ist. Betrachte den zu $g_1(z)$ aus dem Beweis von Satz 1 gehörigen Aufzählungsoperator $\Phi_{g_1(z)}$. Sei außerdem Φ ein Aufzählungsoperator, welcher den rekursiven Operator Ψ definiert mit

$$\Psi(\varphi)(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } \varphi(x) > 0; \\ 0, & \text{falls } \varphi(x) = 0; \\ \text{undefiniert,} & \text{falls } \varphi(x) \text{ undefiniert.} \end{cases}$$

Wir zeigen, daß $\Phi_{g_1(z)}\Phi$ den gewünschten allgemeinen rekursiven Operator definiert. Sei dieser Ψ' . Dann ist also zu zeigen: (i) $c_A = \Psi'(c_B)$; und (ii) $\forall f \in \mathcal{F} [\Psi'(f) \in \mathcal{F}]$.

Zu (i): Es gilt: $\Psi'(c_B) = \tau^{-1}\Phi_{g_1(z)}\Phi\tau(c_B) = \tau^{-1}\Phi_{g_1(z)}\tau(c_B)$ ((da $\Phi\tau(c_B) = \tau(c_B)$ wegen c_B char. Fkt.)) $= \tau^{-1}(\tau(c_A))$ ((nach Definition von $g_1(z)$)) $= c_A$.

Zu (ii): Sei $f \in \mathcal{F}$ beliebig gegeben. Dann gibt es eine Menge X_f mit $\Psi(f) = c_{X_f}$. Nach Wahl von z gibt es ferner ein Y_f mit $c_{Y_f} = \mathcal{G}_z^{X_f}$. Es folgt: $\Psi'(f) = \tau^{-1}\Phi_{g_1(z)}\Phi\tau(f) = \tau^{-1}\Phi_{g_1(z)}\tau\Psi(f)$ ((da Φ Ψ definiert)) $= \tau^{-1}\Phi_{g_1(z)}\tau(c_{X_f}) = \tau^{-1}\tau(c_{Y_f})$ ((nach Def. von $g_1(z)$)) $= c_{Y_f} \in \mathcal{F}$.

" $\Leftarrow$ ": Definiere Φ_z einen allgemeinen rekursiven Operator Ψ mit $\Psi(c_B) = c_A$. Es gilt: $\Psi: \{\varphi \mid \tau(\varphi) \in \Phi_z^{-1}(P) \cap P\} \rightarrow P$ mit $\Psi = \tau^{-1}\Phi_z\tau$, wobei $\Phi_z: \Phi_z^{-1}(P) \cap P \rightarrow P$ mit $\Phi_z(X) = \Phi_z(X)$. Da $\Psi(c_B)$ definiert ist $\tau(c_B) \in \Phi_z^{-1}(P) \cap P$; und $c_A = \Psi(c_B) = \tau^{-1}(\Phi_z(\tau(c_B))) = \tau^{-1}(\Phi_z(\tau(c_B)))$. Also $\tau(c_A) = \Phi_z(\tau(c_B))$, und damit $c_A \leq_e c_B$ via z .

Wähle g_2 wie unter " $\Leftarrow$ " des Beweises von Satz 1. Dann gilt wie dort $c_A = \mathcal{G}_{g_2}^X$, und $\mathcal{G}_{g_2}^X$ ist für alle X total.

Mit §8.4, Satz 3 folgt $A \leq_{tt} B$. Q.e.d.

Korollar: (a) $A \leq_{tt} B \iff$ es gibt einen allgemeinen rekursiven Operator, der charakteristische Funktionen auf charakteristische Funktionen abbildet, und der c_B auf c_A abbildet.

(b) Es gibt Funktionen f und g derart, daß f durch einen rekursiven Operator auf g abgebildet wird, nicht jedoch durch einen allgemeinen rekursiven Operator.

Beweis: (a) " $\Rightarrow$ ": Der durch $\Phi_{g_1(z)}\Phi$ definierte allgemeine rekursive Operator (unter " $\Rightarrow$ " im Beweis des Satzes) bildet charakteristische Funk-

tionen auf charakteristische Funktionen ab.

" $\Leftarrow$ ": Nach " $\Leftarrow$ " des Satzes.

(b) Nach §4.4 gilt $\tilde{K} \leq_{\tau} K$, aber $\tilde{K} \not\leq_{tt} K$. Nach Satz 1 gibt es daher einen rekursiven Operator, der c_K auf $c_{\tilde{K}}$ abbildet, während es nach Satz 3 keinen allgemeinen rekursiven Operator gibt, der c_K auf $c_{\tilde{K}}$ abbildet. Wähle somit $f := c_K$ und $g := c_{\tilde{K}}$.

Die übrigen so weit behandelten Reduzierbarkeitsbegriffe entsprechen rekursiven Operatoren spezieller Art. So läßt sich zu jeder Funktion f ein Operator Φ^f definieren durch

$$\Phi^f(\varphi) := \varphi \circ f$$

für alle $\varphi \in \mathcal{P}$. Das heißt, es gilt $\text{domain } \Phi^f = \mathcal{P}$ und offensichtlich $\Phi^f(\mathcal{F}) \subset \mathcal{F}$. Damit werden wir mithilfe des folgenden Lemmas dann $\leq_m$ sowie $\leq_1$ charakterisieren.

Lemma: Ist f eine rekursive Funktion, so ist Φ^f ein allgemeiner rekursiver Operator.

Beweis: Es ist zu zeigen, daß Φ^f (mit f rekursiv) von einem Aufzählungsoperator definiert wird. Definiere dazu die offenbar rekursiv aufzählbare Menge $W_z := \{ \langle x, y \rangle \mid \exists z [y = 2^z \text{ \& } \pi_1(z) = f\pi_1(x) \text{ \& } \pi_2(z) = \pi_2(x)] \}$. Dann definiert Φ_z den Operator Φ^f , d.h. es gilt $\Phi^f(\varphi) = \tau^{-1} \Phi_z \tau(\varphi)$ für alle $\varphi \in \mathcal{P}$. Denn: $(x, y) \in \tau^{-1} \Phi_z \tau(\varphi) \Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in \Phi_z(\tau(\varphi)) \Leftrightarrow \exists v [\langle \langle x, y \rangle, v \rangle \in W_z \text{ \& } D_v \subset \tau(\varphi)] \Leftrightarrow \exists v [f(x) = \pi_1(v) \text{ \& } y = \pi_2(v) \text{ \& } v \in \tau(\varphi)] \Leftrightarrow (f(x), y) \in \tau(\varphi) \Leftrightarrow (f(x), y) \in \varphi \Leftrightarrow (x, y) \in \varphi \circ f \Leftrightarrow (x, y) \in \Phi^f(\varphi)$. Q.e.d.

Satz 4: $A \leq_m B \Leftrightarrow$ es gibt eine rekursive Funktion f derart, daß $c_A = \Phi^f(c_B)$.

Beweis: " $\Rightarrow$ ": Gelte $A \leq_m B$ via f . Wir zeigen, daß dann $c_A = \Phi^f(c_B)$.

Nämlich: $(x, y) \in \Phi^f(c_B) \Leftrightarrow (x, y) \in c_B \circ f \Leftrightarrow c_B \circ f(x) = y \Leftrightarrow (f(x), y) \in c_B \Leftrightarrow (x, y) \in c_A$ (letzteres aufgrund von $A \leq_m B$ via f).

" $\Leftarrow$ ": Gelte $c_A = \Phi^f(c_B)$ mit rekursivem f . Wir zeigen, daß dann $A \leq_m B$ via f . Denn: $(x, y) \in c_A \Leftrightarrow (x, y) \in \Phi^f(c_B) \Leftrightarrow (x, y) \in c_B \circ f \Leftrightarrow (f(x), y) \in c_B$. Q.e.d.

Korollar: Nicht jeder allgemeine rekursive Operator Ψ läßt sich durch eine rekursive Funktion "darstellen" (i.e. nicht zu jedem allgemeinen rekursiven Operator Ψ existiert ein rekursives f derart, daß $\Psi = \Phi^f$).

Beweis: Eine andere - zu (b) des Korollars zu Satz 3 analoge - Formulierung des Korollars lautet: Es gibt Funktionen f und g derart, daß f durch einen allgemeinen rekursiven Operator auf g abgebildet wird, nicht jedoch durch einen (allgemeinen rekursiven!) Operator der Gestalt $\Phi^{f'}$ mit rekursivem f' . Die Begründung verläuft analog wie zu Satz 3, Korollar (b). Da nach §4.2, Satz 2, $\emptyset \leq_{tt} \mathbb{N}$, gibt es nach Satz 3 einen allgemeinen rekursiven Operator Ψ mit $c_{\emptyset} = \Psi(c_{\mathbb{N}})$. Da aber $\emptyset \not\leq_m \mathbb{N}$ (§2.1, Satz 2), gibt es nach Satz 4

kein rekursives f' mit $c_\emptyset = \Phi^{f'}(c_{\mathbb{N}})$. Definiere daher $f := c_{\mathbb{N}}$ und $g := c_\emptyset$. Insbesondere sind dann f und g rekursiv.

Satz 5: $A \leq_1 B \iff$ es gibt eine rekursive und injektive Funktion f derart, daß $c_A = \Phi^f(c_B)$.

Beweis: Wie im Beweis von Satz 4 folgt für $A \leq_1 B$ via f , daß $c_A = \Phi^f(c_B)$; und für $c_A = \Phi^f(c_B)$, daß $A \leq_1 B$ via f .

Korollar: Es gibt (insbesondere rekursive) Funktionen f und g derart, daß f durch einen (allgemeinen rekursiven) Operator Φ^h mit rekursivem h auf g abgebildet wird, nicht jedoch durch einen Operator $\Phi^{h'}$ mit rekursivem und injektivem h' .

Beweis: Wähle $f := c_{\{0\}}$ und $g := c_{\{0,1\}}$. Wegen $\{0,1\} \leq_m \{0\}$ (§2.1, Satz 2), jedoch $\{0,1\} \not\leq_1 \{0\}$, gibt es dann nach Satz 4 ein rekursives h mit $g = \Phi^h(f)$, aber - nach Satz 5 - kein rekursives und injektives h' mit $g = \Phi^{h'}(f)$. Dabei sind die Funktionen f und g offenbar rekursiv.

Wir stellen also fest, daß die verschiedenen so weit behandelten Reduzibilitäten mit zunehmender Stärke immer spezielleren rekursiven Operatoren entsprechen. Die folgende Tabelle resümiert noch einmal, durch welche Operatoren im Fall von $A \leq_{\text{red}} B$ (für $\text{red} \in \{m, 1, tt, T\}$) c_B auf c_A abgebildet wird:

$\leq_{\text{red}}$	Art der Operatoren
$\leq_T$	rekursive Operatoren
$\leq_{tt}$	allgemeine rekursive Operatoren
$\leq_m$	allgemeine rekursive Operatoren der Gestalt Φ^f mit einer rekursiven Funktion f
$\leq_1$	allgemeine rekursive Operatoren der Gestalt Φ^f mit einer rekursiven und injektiven Funktion f .

FINIS

Ulum, Manuel

- (1964) A machine-independent theory of recursive functions, Ph.D. Dissertation, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Mass.
(unveröffentlicht)

Church, Alonzo

- (1936) A note on the Entscheidungsproblem, The journal of symbolic logic, vol. 1, pp. 40-41, 101-102.

Davis, Martin

- (1958) Computability and unsolvability, McGraw-Hill Book Company, New York.

Dekker, James C.E.

- (1953) Two notes on recursively enumerable sets, Proceedings of the American Mathematical Society, vol. 4, pp. 495-505.
(1954) A theorem on hypersimple sets, Proceedings of the American Mathematical Society, vol. 5, pp. 791-796.
(1955) Productive sets, Transactions of the American Mathematical Society, vol. 78, pp. 129-149.

Dekker, James C.E., und John Myhill

- (1958) Some theorems on classes of recursively enumerable sets, Transactions of the American Mathematical Society, vol. 89, pp. 25-59.

Fischer, Patrick C.

- (1962) Theory of provable recursive functions, Ph.D. Dissertation, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Mass.
(1963) A note of bounded-truth-table reducibility, Proceedings of the American Mathematical Society, vol. 14, pp. 875-877.

Gödel, Kurt

- (1931) Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme, I, Monatshefte für Mathematik und Physik, vol. 38, pp. 173-198.

Hermes, Hans

- (1971) Aufzählbarkeit, Entscheidbarkeit, Berechenbarkeit - Einführung in die Theorie der rekursiven Funktionen, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York

Hockusch, Carl G., Jr.

- (1966) Reducibilities in recursive function theory, Ph.D. Dissertation, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Mass.

Kleene, Stephen C.

- (1952) Introduction to metamathematics, D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton, N.J.

Kleene, Stephen C., und Emil L. Post

(1954) The upper semi-lattice of degrees of recursive unsolvability, *Annals of mathematics*, ser. 2, vol. 59, pp. 379-407.

Myhill, John

(1955) Creative sets, *Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik*, vol. 1, pp. 97-108.

(1959) Recursive digraphs, splinters and cylinders, *Mathematische Annalen*, vol. 138, pp. 211-218.

Myhill, J., und J.C. Shepherdson

(1955) Effective operations on partial recursive functions, *Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik*, vol. 1, pp. 310-317.

Nerode, Anil

(1957) General topology and partial recursive functionals, *Summaries of talks presented at the Summer Institute for Symbolic Logic, Cornell University, 1957*, pp. 247-251.

Post, Emil L.

(1944) Recursively enumerable sets of positive integers and their decision problems, *Bulletin of the American Mathematical Society*, vol. 50, pp. 284-316.

Quine, Willard V.

(1963) *Set theory and its logic*, Harvard University Press, Cambridge, Mass.

Rice, H. Gordon

(1953) Classes of recursively enumerable sets and their decision problems, *Transactions of the American Mathematical Society*, vol. 74, pp. 358-366.

Rogers, Hartley, Jr.

(1967) *Theory of Recursive Functions and Effective Computability*, McGraw-Hill Book Company, New York, St. Louis, San Francisco, Toronto, London, Sydney.

Shoenfield, Joseph R.

(1957) Quasicreative sets, *Proceedings of the American Mathematical Society*, vol. 8, pp. 964-967.

Tarski, Alfred

(1932) *Der Wahrheitsbegriff in den Sprachen der deduktiven Disziplinen*, Akademie der Wissenschaften in Wien, Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse, Anzeiger, vol. 69, pp. 24-25.

(1936) *Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen*, *Studia philosophica*, vol. 1, pp. 261-405.

Turing, Alan M.

(1936) On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem, Proceedings of the London Mathematical Society, ser. 2, vol. 42, pp. 230-265; vol. 43, pp. 544-546.

(1937) Computability and λ -definability, The journal of symbolic logic, vol. 2, pp. 153-163.

Uspenskii, V.A.

(1957) Some notes on recursively enumerable sets; englische Übersetzung des russischen Originals in: American Mathematical Society translations, vol. 23.

Young, Paul R.

(1963) On the structure of recursively enumerable sets, Ph.D. Dissertation, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Mass.

(1966) Linear orderings under one-one reducibility, Journal of symbolic logic, vol. 31, pp. 70-85.

Diese Liste enthält nur solche Arbeiten, auf die in dieser Arbeit durch Nennung ihres Titels oder in anderer Weise Bezug genommen wird.-

LEBENS LAUF

Geboren am 20.09.1950 in Treuchtlingen (Franken) als Sohn des Bundesbahn-Assistenten Georg Stark und seiner Frau Elisabeth, geb. Hjermer, besuchte ich nach dem Umzug meiner Eltern nach Rennertshofen (Kreis Neuburg/Donau) im Jahr 1957 dort bis 1961 die Volksschule. Nach der Einschulung ins Gymnasium Neuburg trat ich - infolge des Umzugs meiner Eltern nach München - 1961 ins Max-Planck-Gymnasium (damals "Oberrealschule") München-Pasing über, wo ich 1970 das Reifezeugnis erwarb. Im WS 70/71 an der Pädagogischen Hochschule in Pasing immatrikuliert, bemerkte ich bald an der eindeutigen Ausrichtung meiner Interessen auf philosophische und literaturwissenschaftliche Disziplinen, daß ich mit dem Beruf des Lehrers nicht die meiner eigentlichen Neigung entsprechende Wahl getroffen hatte - eine Erkenntnis, in der mir auch die persönlichen Gespräche mit Herrn Dr.H.Zahn bestärkten. Weiterführendes Studium des Spanischen (das ich auf der Schule im Wahlfach hatte), sowie ein ausgeprägtes Bedürfnis, mich eingehend mit dem Werk Shakespeares am Original zu befassen, führten vorübergehend zu einem längeren Spanienaufenthalt, bevor ich dann im SS 72 das Studium der Philosophie und Germanistik an der Ludwig-Maximilians-Universität München begann. Ungefähre Bekanntschaft mit Wittgensteinscher Philosophie neben dem schon auf der Schule erwachten Interesse an den Grundlagen der Mathematik ließen mir insbesondere das Studium der Analytischen Philosophie am Seminar II der Philosophischen Fakultät naheliegend scheinen, das sich dann hauptsächlich auf Logik und Wissenschaftstheorie konzentrierte. Ich hörte Logik, Sprachphilosophie und logizistische Grundlegung der Mathematik bei den Professoren H.K.Essler, M.Käsbauer, W.Stegmüller und C.-F.v.Weizsäcker, begleitet von Seminaren bei U.Blau, W.Hoering, G.Link, E.v.Savigny und M.Varga von Kibéd. Über das Studium der mathematischen Logik und Grundlagenforschung am philosophischen Seminar hinaus lag es dann nahe, diese im Fachbereich für Mathematik selbst zu hören: Logik, Beweistheorie und Rekursive Funktionen bei Prof.Dr.K.Schütte, sowie Axiomatische Mengenlehre bei Prof.Dr.H.Osswald; neben Analysis, Algebra, Topologie und Maßtheorie bei den Professoren H.Elstrodt, F.Kasch und W.Roelcke. Im Rahmen von Literaturwissenschaft und Komparatistik standen hervor die Vorlesungen über den französischen Roman bei Prof.Dr.R.Warning, über Shakespeare (nebst zwei Oberseminaren) bei Prof.Dr.Dr.h.c. W.Clemen, sowie in Neuerer Deutscher Literatur bei R.v.Heydebrand, G.Motekat, F.Sengle und W.Vordtriede.- Die vorliegende Dissertation schließlich gründet in einer Reihe von Seminaren über Rekursionstheorie bei Prof. U.Blau in den Jahren '76 bis '78.

Frankel Red

